Utsatt Eksamen 6. juni 2014 **IR102512 Matematikk 1**
Eksamenstid 4 timer *Bokmål*

Hvis du blir ferdig med oppgavene under del 1 før kl. 11.00, så kan og bør du starte på del 2 uten bruk av hjelpemidler. Du kan bare bruke tillate hjelpemidler etter kl. 11.00.

Ta med **all mellomregning** som er nødvendig for å grunngi svaret.

Del 1. (09.00-11.00). I denne delen er ingen hjelpemidler tillatt.

Oppgave 1 .... *(15%)*

(a) La $A = \{0, 1, 2, 3\}$ og $B = \{0, 2, 4\}$. Finn $A \cap B$.

(b) Løs andregradslikninga $z^2 + 2iz - 2 = 0$ der $i = \sqrt{-1}$.

(c) La $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Om mulig regn ut AB og BA.

Oppgave 2 .... *(5%)*

Finn alle løsningene til likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Oppgave 3 .... *(10%)*

Deriver funksjonene med hensyn på x.

(a)

$$f(x) = \sqrt{1 - x + x^2}$$

(b)

$$g(x) = \sin x(1 - \cos x)$$

Oppgave 4 .... *(10%)*

(a) Vis ved delbrøksoppspaltning at

$$\frac{2x^2 + 5}{x^3 + x} = \frac{5}{x} - \frac{3x}{x^2 + 1}$$

(b) Finn integralet

$$\int \frac{2x^2 + 5}{x^3 + x}\, dx$$

Oppgave 5 .... *(10%)*

Finn integralene

(a)

$$\int (1 + x) \sin x \, dx$$

(b)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2 + x}}\, dx$$

Del 2. (11.00-13.00). I denne delen av kalkulator, lærebøker og matematisk formelsamling tillatt. *Derivasjon og integrasjon skal utføres manuelt og mellomregninger føres inn. Differensiallikninger skal løses ved manuell metode. Kalkulatoren kan bare brukes til tallregning og eventuelt til kontroll.*

Sett kalkulatoren på radianer.

Oppgave 6 .... *(5%)*

Funksjonen $f(x) = x - e^{-x}$ har et nullpunkt mellom 0 og 1.

Finn nullpunktet ved Newton's metode i tre steg. Sett $x_0 = 0.5$.

(Regn f.eks. med 5 desimaler.)

Oppgave 7 .... *(5%)*

Finn alle de tre løsningene av $z^3 = 8$.

Oppgave 8 .... *(5%)*

Vil finne tilnærma verdi av arealet av en innsjø. Målinger blei gjort hver 20 meter langs bredden av sjøen. Bruk trapesmetoden med data fra tabellen under.

Måling	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Bredde(meter)	0	50	54	82	82	73	75	80	0

Oppgave 9 .... *(5%)*

En kurve er gitt ved $y^3 + 7y = x^3$.

Bruk implisitt derivasjon til å finne et uttrykk for y'.

Finn et uttrykk for linja som tangerer kurven i punktet $(-2, -1)$.

Oppgave 10 .... *(5%)*

Finn Taylorpolynomet av grad 3, $P_3(x)$, for $f(x) = \sin(2x)$ med senter i $a = 0$.

Bruk $P_3(x)$ til å finne en tilnærma verdi av $\sin(0.2)$.

Oppgave 11 .... *(10%)*

Grafen til funksjonen $f(x) = 2x - x^2$ avgrenser et flatestykke F i første kvadrant.

(a) Finn y-koordinaten til tyngdepunktet til flatestykket F.

(b) Finn volumet av det romlegemet som framkommer når flatestykket F roterer en gang om y-aksen.

Oppgave 12 .... *(15%)*

Løs differensiallikningene

(a) $y' = 10 - \dfrac{y}{2}$, der $y(0) = 10$.

(b) $y'' + 2y' + 2y = 0$.

(c) $y'' + 4y' + 3y = e^{-3x}$.

Om du blir ferdig med oppgåvene under del 1 før kl. 11.00, så kan og bør du starte på del 2 utan bruk av hjelpemiddel. Du kan bare bruke tillatne hjelpemiddel etter kl. 11.00.

Ta med **all mellomrekning** som er nødvendig for å grunngi svaret.

Del 1. (09.00-11.00). I denne delen er ingen hjelpemiddel tillatne.

Oppgåve 1 .... *(15%)*

(a) La $A = \{0, 1, 2, 3\}$ og $B = \{0, 2, 4\}$. Finn $A \cap B$.

(b) Løys andregradslikninga $z^2 + 2iz - 2 = 0$ der $i = \sqrt{-1}$.

(c) La $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Dersom mogleg rekn ut AB og BA.

Oppgåve 2 .... *(5%)*

Finn alle løysingane til likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Oppgåve 3 .... *(10%)*

Deriver funksjonane med omsyn på x.

(a)

$$f(x) = \sqrt{1 - x + x^2}$$

(b)

$$g(x) = \sin x(1 - \cos x)$$

Oppgåve 4 .... *(10%)*

(a) Vis ved delbrøksoppspalting at

$$\frac{2x^2 + 5}{x^3 + x} = \frac{5}{x} - \frac{3x}{x^2 + 1}$$

(b) Finn integralet

$$\int \frac{2x^2 + 5}{x^3 + x}\, dx$$

Oppgåve 5 .... *(10%)*

Finn integrala

(a)

$$\int (1 + x) \sin x \, dx$$

(b)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2 + x}}\, dx$$

Del 2. (11.00-13.00). I denne delen av eksamen er kalkulator, lærebok og matematisk formelsamling tillatne. *Derivasjon og integrasjon skal utførast manuelt og mellomrekningar skal førast inn. Differensiallikningar skal løysast ved manuell metode. Kalkulatoren kan berre brukast til talrekning og eventuelt til kontroll.*

Sett kalkulatoren på radianar.

Oppgåve 6 . . . . *(5%)*

Funksjonen $f(x) = x - e^{-x}$ har eit nullpunkt mellom 0 og 1.

Finn nullpunktet ved Newton's metode i tre steg. Sett $x_0 = 0.5$.

(Rekn f.eks. med 5 desimalar.)

Oppgåve 7 . . . . *(5%)*

Finn alle dei tre løysingane av $z^3 = 8$.

Oppgåve 8 . . . . *(5%)*

Vil finne tilnærma verdi av arealet av ein innsjø. Målinger blei gjort kvar 20 meter langs breidda av sjøen. Bruk trapesmetoden med data frå tabellen under.

Måling	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Breidd(meter)	0	50	54	82	82	73	75	80	0

Oppgåve 9 . . . . *(5%)*

Ei kurve er gitt ved $y^3 + 7y = x^3$.

Bruk implisitt derivasjon til å finne eit uttrykk for y'.

Finn eit uttrykk for linja som tangerer kurven i punktet $(-2, -1)$.

Oppgåve 10 . . . . *(5%)*

Finn Taylorpolynomet av grad 3, $P_3(x)$, for $f(x) = \sin(2x)$ med senter i $a = 0$.

Bruk $P_3(x)$ til å finne ein tilnærma verdi av $\sin(0.2)$.

Oppgåve 11 . . . . *(10%)*

Grafen til funksjonen $f(x) = 2x - x^2$ avgrensar eit flatestykke F i fyrste kvadrant.

(a) Finn y-koordinaten til tyngdepunktet til flatestykket F.

(b) Finn volumet av den romlekamen som blir danna når flatestykket F blir dreidd ein gong om y-aksen.

Oppgåve 12 . . . . *(15%)*

Løys differensiallikningane

(a) $y' = 10 - \dfrac{y}{2}$, der $y(0) = 10$.

(b) $y'' + 2y' + 2y = 0$.

(c) $y'' + 4y' + 3y = e^{-3x}$.

Del 1. (09.00-11.00).

Oppgave 1 .... *(15%)*

(a) La $A = \{0, 1, 2, 3\}$ og $B = \{0, 2, 4\}$. Finn $A \cap B$.

(b) Løs andregradslikninga $z^2 + 2iz - 2 = 0$ der $i = \sqrt{-1}$.

(c) La $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Om mulig regn ut AB og BA.

Løsning. (a). Snittet er det A og B har felles: $A \cap B = \{0, 2\}$.

(b). Bruker vanlig abc-formel:

$$z = \frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{-2i \pm \sqrt{-4+8}}{2} = \frac{-2i \pm 2}{2} = -i \pm 1.$$

(c). A er 2×3 matrise, mens B er 2×2 matrise. Siden $2 \neq 3$ så er ikke AB definert, mens BA er ei 2×3 matrise:

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+4 & 0-5 & -1+2 \\ 2-4 & 0+5 & -1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

□

Oppgave 2 .... *(5%)*

Finn alle løsningene til likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 - 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ -x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Løsning. Setter opp utvida koeffisientmatrise og radreduserer

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R3=R3+R1]{R2=R2-2R1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R3 \leftrightarrow R2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 6 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[R3+2R2]{R3=} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[-R3/2]{R3=} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Vi har leder 1-ere i kolonnene som tilhører x_1, x_2 og x_3, men ikke x_4. x_4 er fri variabel. Tredje rad sier: $x_3 = -1 + 2x_4$. Andre rad sier: $x_2 = 2 + x_4$. Første rad sier $x_1 = 1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 - 2(2 + x_4) + (-1 + 2x_4) + 2x_4 = -4 + 2x_4$. Løsning:

$$\begin{cases} x_1 = -4 + 2x_4 \\ x_2 = 2 + x_4 \\ x_3 = -1 + 2x_4 \\ x_4 = \text{fri} \end{cases}$$

□

Oppgave 3 .... *(10%)*

Deriver funksjonene med hensyn på x.

(a)

$$f(x) = \sqrt{1 - x + x^2}$$

(b)

$$g(x) = \sin x(1 - \cos x)$$

Løsning. (a) Kjerneregelen med $u = 1 - x + x^2$ og $u' = 2x - 1$ og $f(u) = u^{1/2}$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 - x + x^2)^{-1/2}(2x - 1) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{1 - x + x^2}}.$$

(b) Produktregelen:

$$g'(x) = \cos x(1 - \cos x) + \sin x(\sin x) = \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x$$

□

Oppgave 4 . . . . *(10%)*

(a) Vis ved delbrøksoppspaltning at

$$\frac{2x^2 + 5}{x^3 + x} = \frac{5}{x} - \frac{3x}{x^2 + 1}$$

(b) Finn integralet

$$\int \frac{2x^2 + 5}{x^3 + x}\, dx$$

Løsning. (a) Siden $x^3 + x = x(x^2 + 1)$ så har delbrøken formen

$$\frac{2x^2 + 5}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{A(x^2 + 1) + Bx^2 + Cx}{x(x^2 + 1)}$$

Får likning

$$Ax^2 + A + Bx^2 + Cx = 2x^2 + 5.$$

Fra x^2-ledd: $A + B = 2$, x-ledd: $C = 0$ og k-ledd: $A = 5$. Da blir $B = 2 - A = 2 - 5 = -3$. Det er presis det vi skulle ha.

(b) I integrasjonen bruker vi substitusjonen $u = x^2 + 1$ med $u' = 2x$ så $\frac{1}{2}du = dx$:

$$\int \frac{2x^2 + 5}{x(x^2 + 1)}\, dx = \int \frac{5}{x}\, dx - \int \frac{3x}{x^2 + 1}\, dx = 5 \ln|x| - \frac{3}{2} \int \frac{1}{u}\, du$$
$$= 5 \ln|x| - \frac{3}{2} \ln(x^2 + 1) + C.$$

□

Oppgave 5 . . . . *(10%)*

Finn integralene

(a)

$$\int (1 + x) \sin x\, dx$$

(b)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2 + x}}\, dx$$

Løsning. (a) Delvis integrasjon ved tabell. Fortegn i første kolonne, deriverer andre og integrerer tredje.

$$\begin{array}{cc|c} + & 1+x & \sin x \\ - & 1 & -\cos x \\ + & 0 & -\sin x \end{array}$$

Ganger nedover langs diagonalene og får

$$\int (1+x)\sin x\, dx = -(1+x)\cos x + \sin x + C.$$

(b) Substitusjon. $u = 2 + x$ og $du = dx$.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2+x}}\, dx = \int_{u_0}^{u_1} u^{-1/2}\, du = \Big[2u^{1/2}\Big]_{u_0}^{u_1} = \Big[2\sqrt{2+x}\Big]_0^1 = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}.$$

□

Del 2. (11.00-13.00).

Oppgave 6 .... *(5%)*

Funksjonen $f(x) = x - e^{-x}$ har et nullpunkt mellom 0 og 1.

Finn nullpunktet ved Newton's metode i tre steg. Sett $x_0 = 0.5$.

(Regn f.eks. med 5 desimaler.)

Løsning. Får $f'(x) = 1 + e^{-x}$.

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.5 \\ x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.5 - \frac{0.5 - e^{-0.5}}{1 + e^{-0.5}} \approx 0.5 - \frac{-0.10653}{1.6065} \approx 0.56631 \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 0.56631 - \frac{-0.0013045}{1.5676} \approx 0.56714 \\ x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approx 0.56714 \end{aligned}$$

□

Oppgave 7 .... *(5%)*

Finn alle de tre løsningene av $z^3 = 8$.

Løsning. Skriver først 8 på trigonometrisk form. Argumentet til 8 er 0 siden tallet ligger på positive x-aksen. Avstand fra origo er 8. Mao:

$$8 = 8(\cos 0 + i \sin 0).$$

Løsning z på trigonometrisk form $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Da må $z^3 = r^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi)$. Skal løse

$$z^3 = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = 8(\cos 0 + i\sin 0) = 8.$$

Da må vi ha $r^3 = 8$ så $r = 2$. Dessuten må $3\varphi = 0 + n \cdot 2\pi$. Det gir tre ulike vinkler $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 2\pi/3$ og $\varphi_2 = 4\pi/3$. Løsningene av $z^3 = 8$ er altså:

$$\begin{aligned} z_0 &= 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2, \\ z_1 &= 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = -1 + \sqrt{3}i, \\ z_2 &= 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = -1 - \sqrt{3}i. \end{aligned}$$

□

Oppgave 8 .... *(5%)*

Vil finne tilnærma verdi av arealet av en innsjø. Målinger blei gjort hver 20 meter langs bredden av sjøen. Bruk trapesmetoden med data fra tabellen under.

Måling	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Bredde(meter)	0	50	54	82	82	73	75	80	0

Løsning. Bruker Trapesmetoden med bredden som y_i-er og steglengde $h = 20m$.

$$\begin{aligned}\text{Areal} &\approx h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + \frac{y_8}{2}) \\ &= 20(0 + 50 + 54 + 82 + 82 + 73 + 75 + 80 + 0) = 9920(m^2).\end{aligned}$$

□

Oppgave 9 .... *(5%)*

En kurve er gitt ved $y^3 + 7y = x^3$.

Bruk implisitt derivasjon til å finne et uttrykk for y'.

Finn et uttrykk for linja som tangerer kurven i punktet $(-2, -1)$.

Løsning. Deriver implisitt begge sider med hensyn på x:

$$3y^2y' + 7y' = 3x^2$$

Skriver venstre side som $y'(3y^2 + 7)$ og deler begge sider på $(3y^2 + 7)$:

$$y' = \frac{3x^2}{3y^2 + 7}.$$

Setter vi inn $x = -2$ og $y = -1$ får vi stigningstall til tangentlinja:

$$m = y'|_{(-2,-1)} = \frac{3(-2)^2}{3(-1)^2 + 7} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}.$$

Setter inn i ettpunktformelen $y = y_0 + m(x - x0)$ og får tangentlinja:

$$y = -1 + \frac{6}{5}(x + 2).$$

□

Oppgave 10 .... *(5%)*

Finn Taylorpolynomet av grad 3, $P_3(x)$, for $f(x) = \sin(2x)$ med senter i $a = 0$.

Bruk $P_3(x)$ til å finne en tilnærma verdi av $\sin(0.2)$.

Løsning. Deriver og får $f'(x) = 2\cos(2x)$, $f''(x) = -4\sin(2x)$ og $f'''(x) = -8\cos(2x)$.

Setter inn $x = 0$ og får: $f(0) = \sin(0) = 0$, $f'(0) = 2\cos(0) = 2$, $f''(0) = -4\sin(0) = 0$ og $f'''(0) = -8\cos(0) = -8$.

Inn i formelen for Taylorpolynom:

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 \\ &= 0 + 2(x-0) + 0(x-0)^2 - \frac{8}{6}(x-0)^3 = 2x - \frac{4}{3}x^3. \end{aligned}$$

Skal vi finne tilnærma verdi for $\sin(0.2)$ med $P_3(x)$ må vi bruke $x = 0.1$ siden $f(0.1) = \sin(2 \cdot 0.1) = \sin(0.2)$. Vi får

$$P_3(0.1) = 2 \cdot 0.1 - \frac{4}{3}(0.1)^3 \approx 0.19867.$$

(Kan sjekke svaret ved å taste inn $\sin(0.2)$ (i radianer!) på kalkulatoren.) □

Oppgave 11 .... *(10%)*

Grafen til funksjonen $f(x) = 2x - x^2$ avgrenser et flatestykke F i første kvadrant.

(a) Finn y-koordinaten til tyngdepunktet til flatestykket F.

(b) Finn volumet av det romlegemet som framkommer når flatestykket F roterer en gang om y-aksen.

Løsning. (a) Finner skjæringspunkt med x-aksen: $2x - x^2 = 0$ når $x(2-x) = 0$ som gir $x = 0$ og $x = 2$. Trenger areal:

$$m = \int_0^2 2x - x^2\,dx = \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \left(4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

Finner moment om $y = 0$:

$$\begin{aligned} M_{y=0} &= \frac{1}{2}\int_0^2 (2x - x^2)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 4x^2 - 4x^3 + x^4\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{x^5}{5}\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5}\right) = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

Da får vi

$$\bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m} = \frac{8/15}{4/3} = \frac{2}{5}.$$

y-koordinaten til tyngdepunktet er $2/5$.

(b) Bruker sylinderskallmetoden:

$$\begin{aligned} V_{x=0} &= 2\pi\int_0^2 x(2x - x^2)\,dx = 2\pi\int_0^2 2x^2 - x^3\,dx \\ &= 2\pi\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 2\pi\left(\frac{16}{3} - \frac{16}{4}\right) = \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

□

Oppgave 12 .... *(15%)*

Løs differensiallikningene

(a) $y' = 10 - \frac{y}{2}$, der $y(0) = 10$.

(b) $y'' + 2y' + 2y = 0$.

(c) $y'' + 4y' + 3y = e^{-3x}$.

Løsning. (a) Skriver vi likninga som $y' + \frac{1}{2}y = 10$ har vi lineær likning på standard form. Integrerende faktor:

$$F(x) = e^{\int 1/2 dx} = e^{x/2}.$$

Generell løsning blir

$$y(x) = \frac{1}{F(x)} \int F(x) 10 \, dx = e^{-x/2} \int 10 e^{x/2} \, dx = e^{-x/2}(20e^{x/2} + C) = 20 + Ce^{-x/2}.$$

Skal ha

$$10 = y(0) = 20 + Ce^0 = 20 + C$$

så $C = 10 - 20 = -10$. Løsning blir $y(x) = 20 - 10e^{-x/2}$.

(b) Homogen andre ordens diff.likn. Kar.likn. $r^2 + 2r + 2 = 0$. *abc*-formel:

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4}\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm i.$$

Tilfelle III. Løsning: $y(x) = Ae^{-x}\cos(x) + Be^{-x}\sin(x)$.

(c) Ikke-homogen likning. Kar.likn. $r^2 + 4r + 3 = 0$. *abc*-formelen gir $r = -3$ og $r = -1$. Homogen løsning $y_h(x) = Ae^{-3x} + Be^{-x}$.

Høyreside $f(x) = e^{-3x}$. Gjetter vi $y_p(x) = Ce^{-3x}$ så er gjettinga en del av homogenløsning.

Modifisert gjetting: $y_p(x) = Cxe^{-3x}$ gir $y_p'(x) = C(-3xe^{-3x} + e^{-3x})$ og $y_p''(x) = C(9xe^{-3x} - 6e^{-3x})$. Setter inn

$$\begin{aligned} y_p'' + 4y_p' + 3y_p &= C(9xe^{-3x} - 6e^{-3x}) + 4C(-3xe^{-3x} + e^{-3x}) + 3Cxe^{-3x} \\ &= e^{-3x}(-6C + 4C) = -2Ce^{-x} = e^{-3x} \end{aligned}$$

Ser at $C = -\frac{1}{2}$. Løsning

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-3x} + Be^{-x} - \frac{1}{2}xe^{-3x}.$$

$\square$