Matematikk frå Røynda
Kostnad, inntekt og likningar

Hans Georg Schaathun

28. oktober 2019

Innhald

1 Lineær kostnad og inntekt

Til øvingstimen 1 (25. september 2019). I dag bør alle koma gjennom avsnitt 1.1–1.3 nedanfor.

Dei som har tid til meir, kan gjera

- Læreboka, oppgåve 1.38
- Læreboka, oppgåve 2.7
- Læreboka, oppgåve 2.12–13

Til øvingstimen 2 (30. september 2019). I dag bør alle koma gjennom avsnitt 1.4–1.5 nedanfor.

Dei som har tid til meir, kan gjera

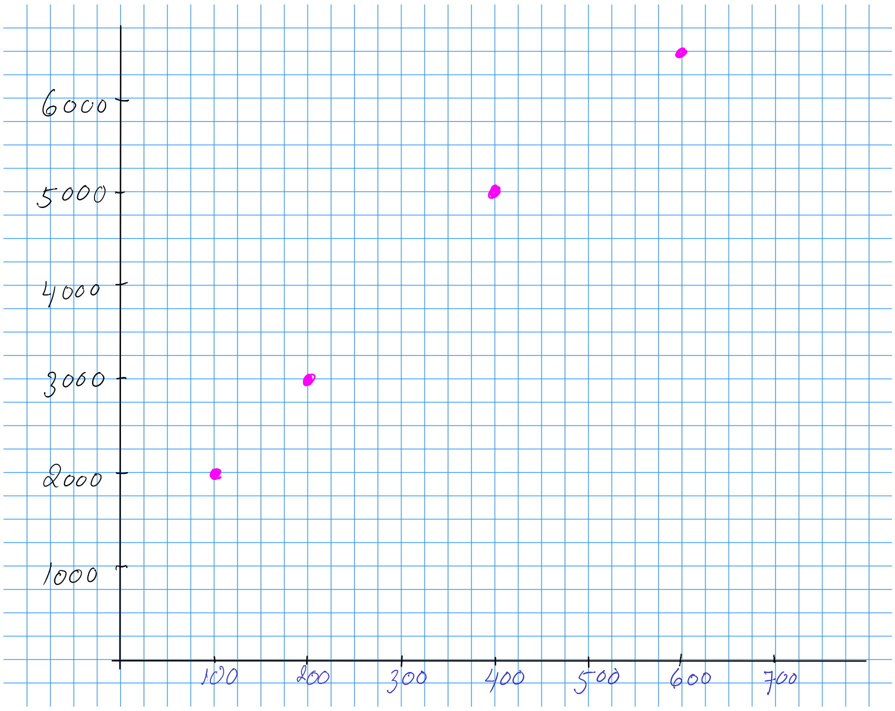
- Læreboka, oppgåve 2.19–21
- Læreboka, oppgåve 2.9–11
- evt. lærebokoppgåvene frå 25. september
- evt. fleire oppgåver frå kapittel 2.4 i boka.

1.1 Todimensjonal graf

Øvingsoppgåve 1.1. Piddien sel strikkevantar. Han tener 100 kroner på kvart par han sel. Kor mykje tener han når han sel ti par?

Eksempeloppgåve 1.2. Ålesund Dings og Profitt AS sel dingsar. Dei har rekna på kostnadene ved ulike produksjonsvolum, og kome fram til fylgjande. Produksjon av 100 dingsar: kr. 2000; 200 dingsar: kr. 3000; 400 dingsar: kr. 5000; 600 dingsar: kr. 6500. Visualiser samanhengen mellom produksjonsvolum og kostnad i eit plott.

Løysing 1.1.



Øvingsoppgåve 1.3 (fortsetjing av forrige oppgåve)**.** Ålesund Dings og Profitt AS har rekna ut ytterlegare eit par kostnadsdøme. Produksjon av 300 dingsar: kr. 4000 og produksjon av 700 dingsar: kr. 6400. Legg til desse to datapunkta i løysinga frå forrige oppgåve.

Eksempeloppgåve 1.4. Piddien sel strikkevantar. Han tener 100 kroner på kvart par han sel. Kor mykje tener han når han sel x par vantar?

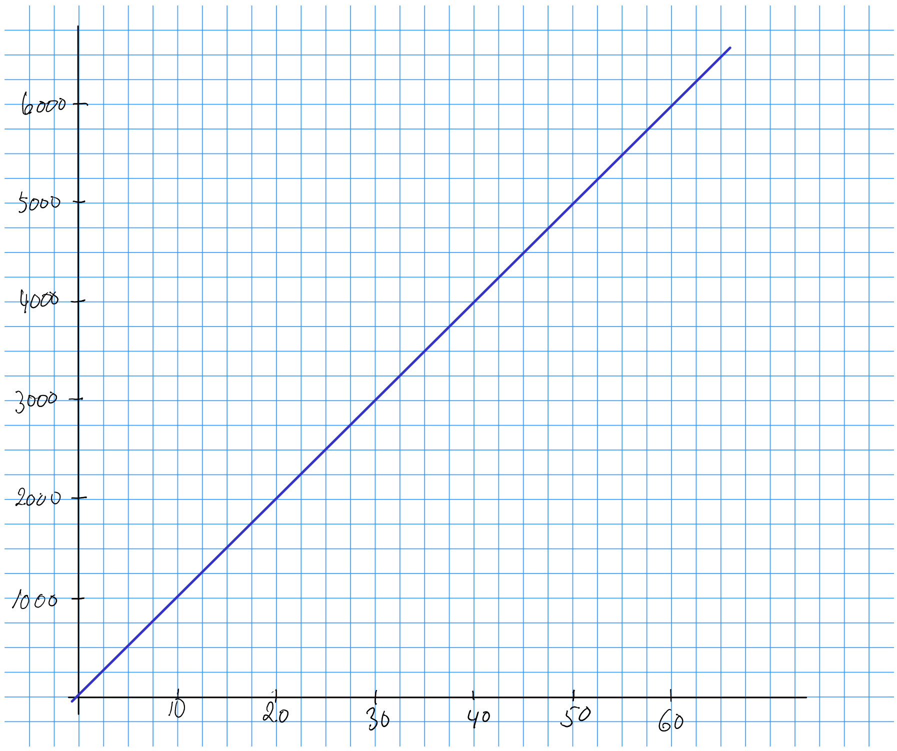
1. Skriv ned ein funksjon som gjev inntekten for x par solgte vantar.

2. Illustrer samanhengen mellom x og samanlagd inntekt grafisk.

Løysing 1.2. Piddien tener 100 kroner per par. Når han sel x par, tener han $100 \cdot x$. kroner Som ein funksjon kan me skriva

$$I(x) = 100 \cdot x,$$

der $I(x)$ er inntekta gjeve at han sel x par.



Øvingsoppgåve 1.5. Ålesund Dings og Profitt AS sel dingsar. Utsalsprisen er 25 kroner per dings.

1. Skriv ned ein funksjon som gjev bruttoinntekta (dvs. før utgiftene er trekt frå) når dei sel x dingsar.

2. Illustrer samanhengen mellom x og inntekta grafisk.

Eksempeloppgåve 1.6. Lat oss studera produksjonskostnaden hos Ålesund Dings og Profitt AS. Dei har faste kostnader på 1000 kroner; dvs. 1000 kr. som dei må betala uansett kor mange dingsar dei produserer. I tillegg kostar det 10 kroner for kvar dings som vert produsert.

1. Skriv ned ein funksjon som gjev kostnadene ved produksjon av x dingsar.

2. Illustrer samanhengen mellom x og kostnadene grafisk.

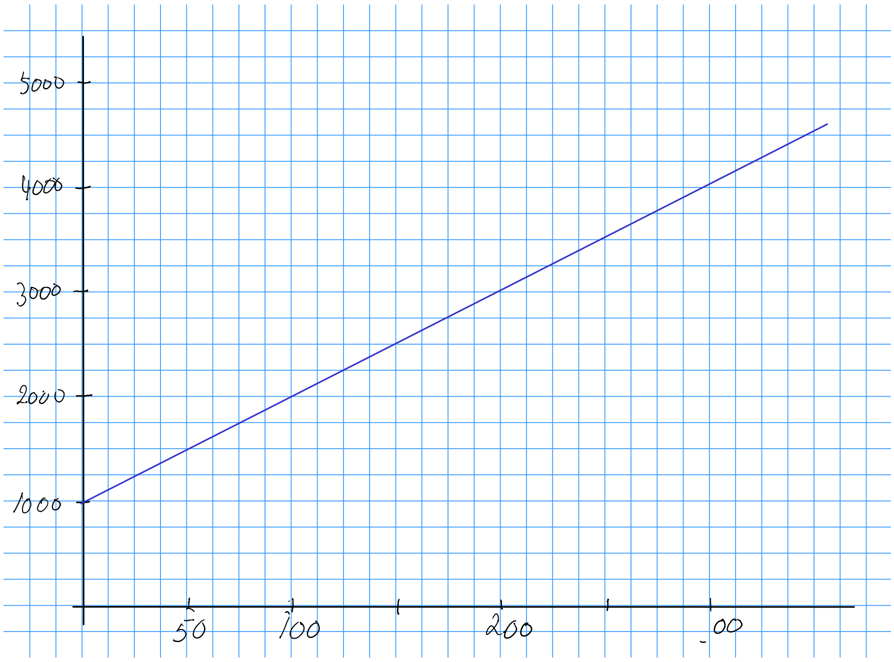
Løysing 1.3. Dette er eit modelleringsproblem der modellen er kostnadsfunksjonen som skildrar kostnadene som bedrifta har.

Me har to typar kostnader. Dei betaler 10 kr per dings og produserer x dingsar. Det vert totalt $10x$ kr i *variable kostnader*. Dei andre kostnadene er faste, eller konstante, på 1000 kr. Dei samla kostnadene er summen av alle typar kostnader, altso $1000 + 10x$.

Lat oss kalla funksjonen for $K(x)$, berre for å ha eit namn. Då skriv me

$$K(x) = 1000 + 10x.$$

Det er svaret på del 1.



Øvingsoppgåve 1.7. Skreddar Skår lever av å selja handsydde dressar. Han bruker 225 000 kroner i året på faste utgifter til verkstaden (husleige og utstyr). Til kvar dress treng han òg 2000 kroner i materialar. Set opp ein kostnadsfunksjon for skreddaren og plott funksjonen i eit rutenett.

Merknad 1.1. Legg merke til samanhengen mellom ein funksjon og ein graf. Me kan finna det produksjonsvolumet som me ynskjer på x-aksen (horisontalaksen), og lesa av kor mykje produksjonen kostar på y-aksen (vertikalaksen). Då er det kostnadsfunksjon som me les av.

Me kan òg lesa den *inverse funksjonen* av det same plottet. Tenk deg at me veit kva me har råd til å betala i produksjonskostnad. Denne kostnaden kan me finna på y-aksen, og vha. kurva finn me kva produksjonsvolum me kan makta på x-aksen.

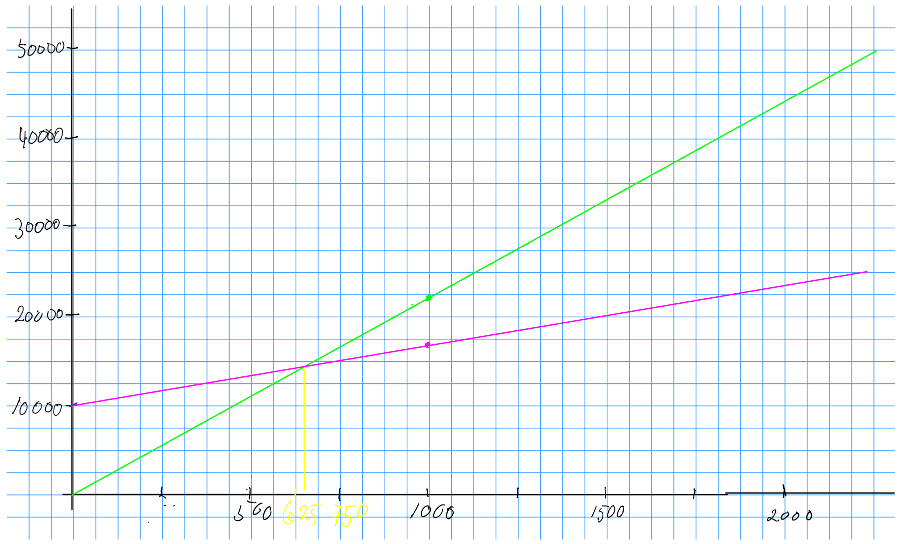
1.2 Likning i éin ukjend

Eksempeloppgåve 1.8. Lat oss studera økonomien i det lokale bryggeriet. Prisen dei får frå serveringsstadene er 22 kroner per liter øl, som gjev inntektsfunksjonen $I(x) = 22x$. Dei har 10 000 kroner i faste kostnader, og 7 kroner per liter i variable kostader. Dvs. at kostnadsfunksjonen er $K(x) = 10000 + 7x$.

1. Plott $K(s)$ og $I(x)$ i same koordinatsystem.

2. Basert på plottet, omtrent kor mange liter øl må bryggeriet selja for å gå i balanse.

Løysing 1.4.



Der linene kryssar, er inntekta like stor som kostnaden, og bryggeriet går i balanse. Me ser ikkje eksakt på literen kvar det skjer, men me ser at det skjer i ruta mellom 625 liter og $677\frac{1}{2}$ liter. Lat oss seia cirka 650 liter.

Merknad 1.2. I oppgåve 1.11 skal me sjå at eksakt svar er $666\frac{2}{3}$ liter, men so nøyaktig klarer me ikkje å sjå på eit handteikna plott på so grovt rutenett.

Øvingsoppgåve 1.9. Sandtaket på Mo sel sand for 600 kr tonnet, slik at dei har inntektsfunksjonen $I(x) = 600 \cdot x$. Kostnaden for å produsera eit tonn sand er 300 kr, i tillegg til faste kostnader på 100 000 kr. Dvs. at kostnadsfunksjonen er $K(x) = 100\,000 + 300x$.

1. Plott $K(s)$ og $I(x)$ i same koordinatsystem.
2. Basert på plottet, omtrent kor mange tonn sand må sandtaket selja for å gå i balanse?

Øvingsoppgåve 1.10. Lasses bensinstasjon sel bensinen for 16 kr literen. Bensinen kostar 8 kr i innkjøp. I tillegg kostar det 32 000 kr å halda bensinstasjonen i drift.

1. Sett opp ein inntektsfunksjon $I(x)$ for Lasse.
2. Sett opp ein kostnadsfunksjon $K(x)$ for Lasse.
3. Plott $K(s)$ og $I(x)$ i same koordinatsystem.
4. Basert på plottet, omtrent kor mange liter bensin må Lasse selja for å gå i balanse?

Eksempeloppgåve 1.11. Lat oss gå tilbake til bryggeriet i oppgåve 1.8. Finn eksakt produksjonsvolum x som gjev balanse mellom inntektene gjeve som $I(x) = 22x$ og kostnadene gjeve som $K(x) = 10000 + 7x$.

Løysing 1.5. Balanse vil seia at kostnadene er lik inntektene, mao.

$$I(x) = K(x), \tag{1.1}$$
$$22x = 10000 + 7x. \tag{1.2}$$

Dei to sidene i likninga er like. Om me gjer same operasjon på båe sider, er dei stadig like. Målet no er å bli kvitt x-en på den eine sida, so me trekk frå $7x$; slik:

$$22x - 7x = 10000 + 7x - 7x, \tag{1.3}$$
$$15x = 10000. \tag{1.4}$$

No har me eit uttrykk for $15x$, men me vil ha eit uttrykk for ein x. Då må må me dela på 15, slik:

$$x = \frac{10000}{15} = 666{,}67. \tag{1.5}$$

Bryggeriet må altso produsera 666,67 liter øl for å gå i balanse.

Øvingsoppgåve 1.12. Lat oss sjå igjen på Sandtaket på Mo frå oppgåve 1.9. Inntektsfunksjonen er $I(x) = 600 \cdot x$ og kostnadsfunksjonen $K(x) = 100\,000 + 300x$. Finn produksjonsvolument x som gjev balanse i drifta.

Øvingsoppgåve 1.13. Gå tilbake til Lasses bensinstasjon i oppgåve 1.10. Bruk inntektsfunksjonen og kostnadsfunksjonen som du fann, og finn ut kor mykje bensin Lasse må selja får å gå i balanse.

Eksempeloppgåve 1.14. Hilde går på sirkus saman med to nevøar. Hilde betaler vaksenbillett, medan nevøane får barnebillett. Barnebilletten kostar to tredjedelar av vaksenbilletten. Til saman betaler dei 420 kroner. Kor mykje kostar vaksenbilletten?

Løysing 1.6. Her må me setja opp ein modell over billettprisane. Dette kan gjerast på litt ulike måtar, avhengig av kor mykje ein gjer i hodet og kva ein helst vil ha skrive ned.

Lat x vera prisen på vaksenbilletten. Det er talet som me vert spurde om. Me kan la prisen på barnebilletten vera y. Totalprisen kan me då skriva som $x + 2y$ kroner. Me har òg fått vita at totalprisen er 420 kroner. Dette gjev ei likning:

$$420 = x + 2y.$$

Likninga har to ukjende, men ho er lett å forenkla. Oppgåva seier at barnebilletten er to tredjedelar av vaksenbilletten. Matematisk kan me skriva

$$y = \frac{2}{3} \cdot x.$$

No kan me byta ut prisen y i den fyrste likninga:

$$420 = x + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot x,$$

og då har likninga berre éin ukjend. Me kan verta kvitt brøken ved å gonga gjennom med nemnaren:

$$3 \cdot 420 = 3 \cdot x + 3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot x,$$

eller

$$1260 = 3 \cdot x + 4 \cdot x = 7x.$$

Ein x er ein sjuandedel av $7x$, so me kan skriva

$$x = \frac{1260}{7} = 180.$$

Vaksenbilletten kostar altso 180 kroner.

Øvingsoppgåve 1.15. Mor, far og tre born tek bussen. Dei betaler 140 kroner totalt. Barnebilletten kostar halvparten av vaksenbilletten. Kor mykje kostar ein vaksenbillett?

Øvingsoppgåve 1.16. Harry kjøper to liter mjølk og åtte liter øl. Mjølka kostar 18 kroner literen og han betaler 630 kroner totalt. Kor mykje kostar ølet per liter?

Øvingsoppgåve 1.17. Line blandar saft i forholdet 1:4, dvs. fire gongar so mykje vatn som saft. Ho får åtte desiliter ferdig saft. Kor mykje konsentrert saft har ho brukt?

1.3 Profittfunksjonen

Eksempeloppgåve 1.18. Me skal sjå litt meir på bryggeriet frå oppgåve 1.8. Inntektsfunksjonen er $I(x) = 22x$, og kostnadsfunksjonen $K(x) = 10000 + 7x$.

1. Finn ein funksjon som fortel kor mykje bryggeriet tener (profitten) når dei produserer og sel x liter øl.

2. Plott funksjonen og samanlikn han med løysinga frå oppgåve 1.8.

Løysing 1.7. Profitten er differansen mellom inntekt og kostnad, altso

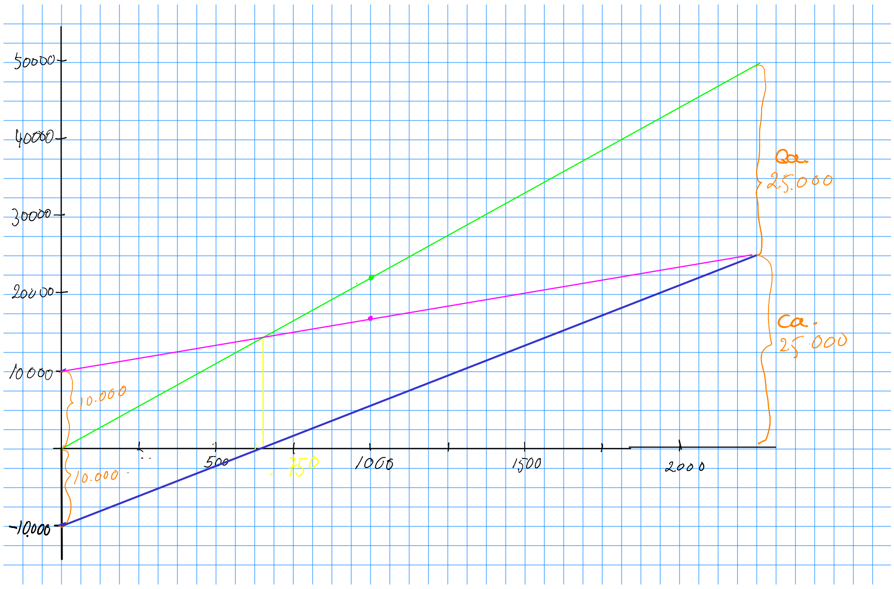
$$P(x) = I(x) - K(x).$$

Sidan kostnaden og inntekta er funksjonar av produksjonsvolumet x, so må profitten $P(x)$ òg vera det.

Om me set inn, får me

$$P(x) = 22x - (10\,000 + 7x) = 15x - 10\,000.$$

Grafisk ser det slik ut:



Her har me plotta i same diagram som kostnads- og inntektsfunksjonen, for å kunna samanlikna. Me kan dobbelsjekka at den vertikale avstanden mellom inntekt og kostnad er lik avstanden mellom profitt og null (dvs. x-aksen).

Øvingsoppgåve 1.19. Lat oss gå tilbake til sandtaket på Mo i oppgåve 1.9. Inntektsfunksjonen er $I(x) = 600 \cdot x$ og kostnadsfunksjonen $K(x) = 100\,000 + 300x$.

1. Finn ein funksjon som fortel kor mykje sandtaket tener (profitten) når dei produserer og sel x tonn sand.

2. Plott funksjonen og samanlikn han med løysinga frå oppgåve 1.9.

Merknad 1.3. Funksjonen som me fann i oppgåva over vert gjerne kalla *profittfunksjonen*.

Definisjon 1.1 (Lineær funksjon)**.** Alle funksjonane som me har studert so langt har formen $f(x) = a \cdot x + b$ og når me plottar dei, får me ei rett line. Difor kallar me slike funksjonar lineære.

Definisjon 1.2 (Lineær likning)**.** Når me krev at to funksjonuttrykk skal vera like, f.eks. for å finna balansen mellom kostnad og inntekt, får me ei *likning*, t.d.

$$K(x) = I(x).$$

Når båe sidene i likninga er lineære funksjonar, so seier me at det er ei *lineær likning*.

1.4 Grense- og gjennomsnittskostnad

Eksempeloppgåve 1.20. Det lokale bryggeriet har kostnadsfunksjonen $K(x) = 10\,000 + 7x$, der x er produksjonsvolumet i liter øl. Kor mykje kostar det å auka produksjonen med ein liter?

Løysing 1.8 (Enkelt og greitt). Me kan lesa kostnadsfunksjonen som 10000 kroner i faste kostnader og sju kroner per liter i variable kostnader. Den einaste endringa når me aukar produksjonen er i dei variable kostnadene på sju kroner per liter. Når me aukar produksjonen med ein liter, kostar det altso sju kroner meir.

Løysing 1.9 (Litt omstendeleg). Når kostnadsfunksjonen vert meir komplisert, er ein ofte nøydd til å bruka ein meir abstrakt metode. Lat oss seia at produksjonen aukar frå x liter til $x+1$ liter. Kostnaden aukar då frå $K(x)$ til $K(x+1)$, og endringa er

$$\Delta K = K(x+1) - K(x) = \big[10000 + 7(x+1)\big] - \big[10000 + 7x\big].$$

Når me løyser opp parentesene får me

$$\Delta K = 10000 + 7(x+1) - 10000 - 7x = 7x + 7 - 7x = 7.$$

Kostnaden aukar altso med sju kroner.

Øvingsoppgåve 1.21. Sandtaket på Mo har kostnadsfunksjonen $K(x) = 100\,000{+}300x$, der x er produksjonsvolumet i tonn sand. Kor mykje kostar det å auka produksjonen med eitt tonn?

Definisjon 1.3. Lat $f(x) = a \cdot x + b$ vera ein lineær funksjon. Koeffisienten a vert kalla *stigningstalet*, og b er *konstandleddet*.

Merknad 1.4. Stigningstalet a i ein lineær kostnadsfunksjon $K(x) = ax + b$ vert kalla *grensekostnaden*. Me skal koma tilbake til dette omgrepet og definera grensekostnad for kostnadsfunksjonar som ikkje treng vera lineære.

Øvingsoppgåve 1.22. Ei bedrift har kostnadsfunksjonen $K(x) = ax + b$. Kor mykje ekstra kostar det å auka produksjonen med éi eining?

Eksempeloppgåve 1.23. Det lokale bryggeriet har kostnadsfunksjonen $K(x) = 10000 + 7x$, der x er produksjonsvolumet i liter øl. Dei produserer 2000 liter øl. Kor mykje kostar det, i gjennomsnitt, å produsera ein liter øl?

Løysing 1.10. Totalkostnaden ved produksjon av 2000 liter er

$$K(x = 2000) = 10000 + 7 \cdot 2000 = 24\,000.$$

Gjennomsnittleg kostnad per liter vert då

$$\frac{K(x = 2000)}{2000} = \frac{24\,000}{2000} = 12.$$

Ein liter øl kostar altso 12 kroner å produsera i gjennomsnitt.

Merknad 1.5. Kostnaden per liter som me rekna ut ovanfor, vert gjerne kalla *gjennomsnittskostnaden* eller *einingskostnaden*.

Øvingsoppgåve 1.24. Det lokale bryggeriet har kostnadsfunksjonen $K(x) = 10000+7x$, der x er produksjonsvolumet i liter øl. Dei produserer 3000 liter øl. Kor mykje kostar det, i gjennomsnitt, å produsera ein liter øl?

Øvingsoppgåve 1.25. Det lokale bryggeriet har kostnadsfunksjonen $K(x) = 10000+7x$, der x er produksjonsvolumet i liter øl. Dei produserer 1000 liter øl.

1. Tenk over før du reknar: Vert gjennomsnittskostnaden høgare eller lågare enn i forrige oppgåve der produksjonen var 3000 liter?

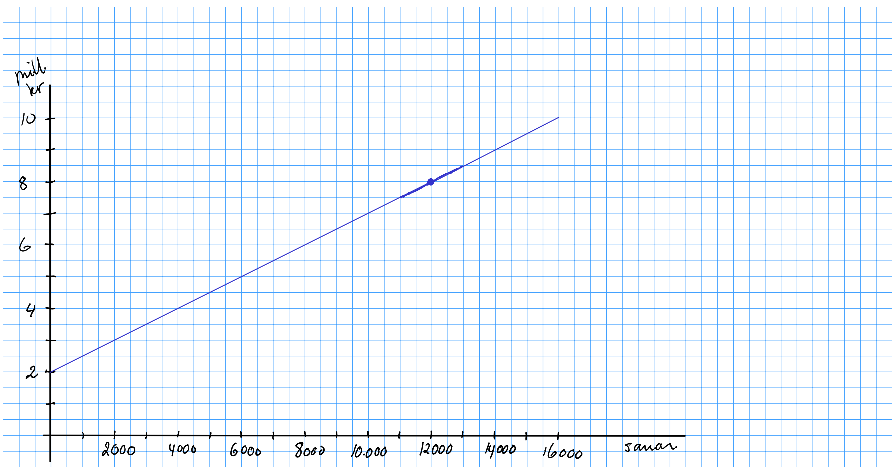
2. Finn gjennomsnittskostnaden.

1.5 Lina gjennom to punkt

Eksempeloppgåve 1.26. Hansens slakteri slakta 12.000 sauar i 2017. Dette gav totale produksjonskostnader på åtte millionar kroner. Dei estimerer at den variable kostnaden per sau levert frå slakteriet er 500 kroner, og går ut frå at kostnadsfunksjonen er lineær. Teikn kostnadsfunksjonen i eit rutenett.

Løysing 1.11. Me kjenner eit punkt i plottet, kostnaden på 8 mill. kr. for 12 000 sauar. Det er det fyrste punktet me plottar.

Dersom me aukar produksjonen med 1000 sauar til 500 kroner per stykk, aukar kostnaden med ein halv million. Denne endringa kan me teikna som eit kort linestykke. Likeeins, dersom ein reduserer produksjonen med 1000 sauar, går kostnaden ned med ein halv million.



Sidan ekstrakostnaden per sau er konstant, kan me forlengja lina med konstant stigningstal.

Merknad 1.6. Legg merke til at årstalet 2017 er irrelevant for løysinga. Det speler inga rolle når slakteriet observerte produksjonskostnaden. Den typen «støy» i oppgåveteksta må ein øva seg til å handtera, fordi slik støy og overflødig informasjon er ein del av livet.

Her er ein video til ettertanke: `https://www.youtube.com/watch?v=kibaFBgaPx4`.

Øvingsoppgåve 1.27. Kari er konditor og sel kaker. Kvar kake kostar 60 kroner i råvarer. I januar produserte Kari 400 kaker og hadde samla kostnader på 38 000 når husleige, løn til lærlingen og alt anna er medrekna. Teikn kostnadsfunksjonen i eit rutenett.

Eksempeloppgåve 1.28. Hansens slakteri slakta 12.000 sauar i 2017. Dette gav totale produksjonskostnader på åtte millionar kroner. Dei estimerer at dei variable kostnaden per sau levert frå slakteriet er 500 kroner, og går ut frå at kostnadsfunksjonen er lineær. Finn eit uttrykk for kostnadsfunksjonen.

Løysing 1.12 (Faste og variable kostnader)**.** Her er det mange opplysingar, so me må strukturera dei litt. Det er fornuftig å starta med ein matematisk form for svaret som me skal fram til, altso ein lineær kostnadsfunksjon, som ser slik ut:

$$K(x) = ax + b.$$

Her er a den variable kostnaden per sau, og b er dei faste kostnadene. Lat oss seia at a og b er målte i kroner.

Dei variable kostnadene er gjevne i oppgåva som $a = 500$. Den faste kostnaden b er ukjend, men me veit at kostaden for 12.000 sauar kan skrivast som

$$K(x = 12\,000) = 500 \cdot 12\,000 + b = 8\,000\,000.$$

Då ser me at dei variable kostnadene for 12.000 sauar er

$$500 \cdot 12\,000 = 6\,000\,000.$$

Sidan dei totale kostnadene er åtte millionar, må dei fast kostnadene vera to millionar, og me kan skriva

$$K(x) = 500 \cdot x + 2\,000\,000.$$

Øvingsoppgåve 1.29. Kari er konditor og sel kaker. Kvar kake kostar 60 kroner i råvarer. I januar produserte Kari 400 kaker og hadde samla kostnader på 38 000 når husleige, løn til lærlingen og alt anna er medrekna. Finn eit uttrykk for kostnadsfunksjonen.

Eksempeloppgåve 1.30. Dingsemakaren har erfart at produksjonskostnadene er 20.000 kroner i ein månad der han produserer 200 dingsar. Når han produserer 300 dingsar per månad, er produksjonskostnadene 25.000 kroner. Me går ut frå at kostnadsfunksjonen er lineær. Kva er dei variable kostnadene per dings?

Løysing 1.13. Me skal finna dei variable kostnadene. Då kan me ta utgangspunkt i variasjonen mellom dei to produksjonsvoluma som er kjende.

	Volum	Kostnad
Andre fall	300	25.000
Fyrste fall	200	20.000
Skilnad	100	5.000

Ei auke på 100 dingsar kostar altso 5000 kroner, eller 50 kroner per dings.

Øvingsoppgåve 1.31. Skomakar Hagen kan produsera 25 par sko på ein månad til ein samla kostnad på 16.000 kroner. Han kan klara 30 par sko til ein kostnad på 18.000 kroner. Me går ut frå at kostnadsfunksjonen er lineær. Kva er dei variable kostnadene per skopar?

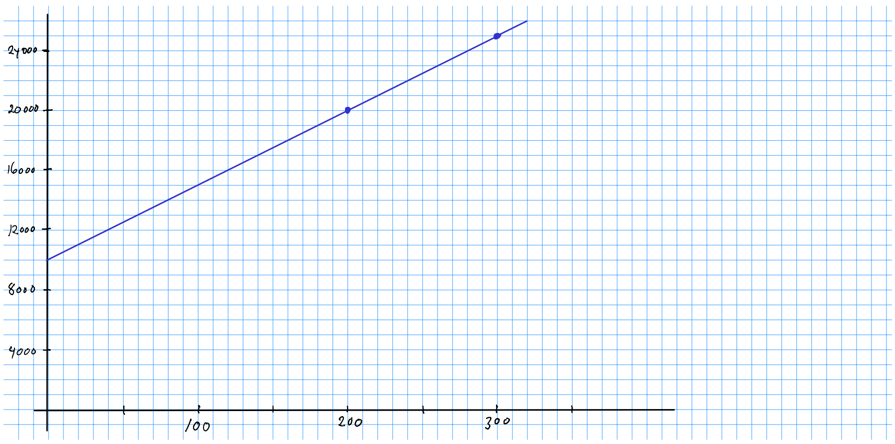
Eksempeloppgåve 1.32. Dingsemakaren har erfart at produksjonskostnadene er 20.000 kroner i ein månad der han produserer 200 dingsar. Når han produserer 300 dingsar per månad, er produksjonskostnadene 25.000 kroner.

1. Plott dei to kostnadsdøma i eit koordinatsystem, og teikn ei rett line gjennom punkta.

2. Finn ein lineær kostnadsfunksjon som passar med kostnadsdøma.

3. Me kan lesa lina i plottet som ein funksjon. Samanlikn han med kostnadsfunksjonen i pkt. 2. Er det same funksjon?

Løysing 1.14. Plottet er rett fram å teikna:



Me ser at kostnaden aukar med 5000 kroner når produksjonen aukar med 100 dingsar. Det gjev ei auke på 50 kroner/dings. Dette er den variable kostnaden, eller stigningstalet på funksjonen, og kostnadsfunksjonen må altso vera $K(x) = 50x + b$ for ein eller annan faste kostnad b.

For 200 dingsar utgjer dei variable kostnadene $200 \cdot 50 = 10000$ kroner, utav 20000 kroner i totale kostnader. Dvs. at dei faste kostnadene må vera 10000 kroner. Kostnadsfunksjonen er då

$$K(x) = 50x + 10000.$$

I plottet ser me at lina kryssar y-aksen ved 10 000 kroner. Det er kostnaden ved nullproduksjon som me ser stemmer med konstantleddet i $K(x)$. Me kan òg sjå at stigningstalet er 50, eller 5000 kroner per 100 dingsar, både i plottet og i funksjonsuttrykket.

Figuren er eit plott av $K(x)$.

Øvingsoppgåve 1.33. Skomakar Hagen kan produsera 25 par sko på ein månad til ein samla kostnad på 16.000 kroner. Han kan klara 30 par sko til ein kostnad på 18.000 kroner

1. Plott dei to kostnadsdøma i eit koordinatsystem, og teikn ei rett line gjennom punkta.
2. Finn ein lineær kostnadsfunksjon som passar med kostnadsdøma.
3. Me kan lesa lina i plottet som ein funksjon. Samanlikn han med kostnadsfunksjon i pkt. 2. Er det same funksjon?

Øvingsoppgåve 1.34 (Abstrakt)**.** Ei line går gjennom punkta $(0, 1)$ og $(2, 3)$ i eit koordinatsystem. Finn ein funksjon som beskriv lina.

1.6 Variabel pris

Eksempeloppgåve 1.35. Me skal atter gå attende til bryggeriet frå oppgåve 1.18, der me fann profittfunksjonen

$$P(x) = 22 \cdot x - 10\,000 - 7 \cdot x.$$

Lat oss no tenkja oss at prisen kan variera. Lat oss skriva p for prisen i staden for 7, dvs.

$$P(x) = p \cdot x - 10\,000 - 7 \cdot x.$$

Gjeve at bryggeriet går eksakt i balanse, skriv prisen p som dei må krevja for ølet som ein funksjon av volumet x.

Løysing 1.15. Me skal fram til eit uttrykk for p. Føresetnaden om at bryggeriet går eksakt i balanse svarer til likninga $P(x) = 0$, eller mao.

$$0 = p \cdot x - 10\,000 - 7 \cdot x.$$

Denne likninga kan me løysa for p, på vanleg måte, sjølv om x vert ståande att som ein ukjend. Me må flytta over det eine leddet med p, og få

$$p \cdot x = 10\,000 + 7 \cdot x.$$

No kan me dela med x på båe sider,

$$p = \frac{10\,000}{x} + \frac{7 \cdot x}{x} = 7 + \frac{10\,000}{x}.$$

Me ser no korleis p avheng av x. For å understreka at dette, kan me skriva p med funksjonsnotasjon som $p(x)$. Prisfunksjonen er altso

$$p(x) = 7 + \frac{10\,000}{x},$$

når bryggeriet går i balanse.

Øvingsoppgåve 1.36. Lat oss gå tilbake til sandtaket på Mo i oppgåve 1.19. Kostnadsfunksjonen er $K(x) = 100\,000 + 300x$. Inntektsfunksjonen hadde me funne som $I(x) = 600 \cdot x$, men lat oss no tenkja at prisen p er variabel, og ikkje konstant lik 600. Då er inntektsfunksjonen $I(x) = p \cdot x$, og profittfunksjonen $P(x) = p \cdot x - 100\,000 - 300 \cdot x$. Kva pris må sandtaket krevja for å gå i balanse? Skriv prisen som ein funksjon $p(x)$ av produksjonsvolumet.

Eksempeloppgåve 1.37. I oppgåve 1.35 fann me ein prisfunksjon. I praksis er prisen normalt bestemt av marknaden, og bedrifta må tilpassa produksjonen til prisnivået. Profittfunksjonen er stadig

$$P(x) = p \cdot x - 10\,000 - 7 \cdot x.$$

Finn ein produksjonsfunksjon $x(p)$ som seier kor mykje bryggeriet kan produsera for eit gjeve prisnivå p, medan drifta går i balanse.

Løysing 1.16. Utgangspunktet, om balanse i drifta, gjev likninga

$$0 = p \cdot x - 10\,000 - 7 \cdot x.$$

I oppgåve 1.35 løyste me for p. No skal me ha eit uttrykk for x, og då må me løysa for x.

Lat oss dra saman alle ledd med x:

$$0 = (p - 7) \cdot x - 10\,000,$$

og flytta over konstandleddet:

$$10\,000 = (p - 7) \cdot x.$$

Når me no deler på $p - 7$, får me eit uttrykk for x:

$$\frac{10\,000}{p - 7} = x.$$

Produksjonsfunksjonen er altso

$$x(p) = \frac{10\,000}{p - 7}$$

når bryggeriet går i balanse.

Øvingsoppgåve 1.38. I oppgåve 1.36 fann me ein prisfunksjon. No ynskjer sandtaket å finna ut korleis dei skal tilpassa produksjonen til prisnivået som er sett av marknaden. Dei vil altso finna ein produksjonsfunksjon $x(p)$ som seier kor mykje sand dei skal produsera dersom dei kan selja han for ein pris p. Ta utgangspunkt i profittfunksjonen

$$P(x) = p \cdot x - 100\,000 - 300 \cdot x$$

og finn $x(p)$ slik at $P(x) = 0$.

Eksempeloppgåve 1.39. Ta pris- og produksjonsfunksjonane frå oppgåve 1.35 og 1.37:

$$p(x) = 7 + \frac{10\,000}{x}, \tag{1.6}$$

$$x(p) = \frac{10\,000}{p-7}. \tag{1.7}$$

Plott både funksjonane.

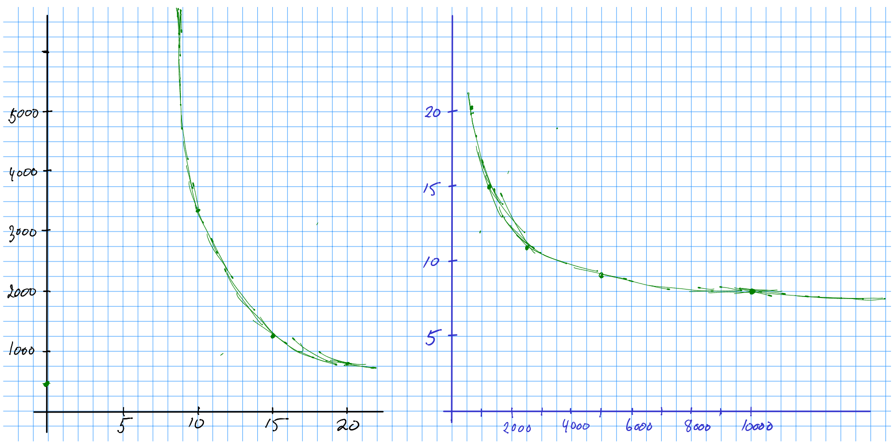
Løysing 1.17. Legg merke til at x og $x(p)$ er produksjonsvolum i liter, medan p og $p(x)$ er pris i liter. Vanlegvis vil me ha funksjonsverdiane $x(p)$ og $p(x)$ på y-aksen og argumenta p og x på x-aksen. Då kan me ikkje plotta funksjonane i same diagram.

Korkje $p(x)$ eller $x(p)$ er lineære funksjonar, fordi variabelen (hhv. x og p) står under brøkstreken. Då må me rekna ut litt meir enn to punkt for å teikna godt.

p	$x(p)$
0	−1428,57
2	−2000,00
5	−5000,0
6	−10 000,0
8	10 000,0
9	5000,0
10	3333,33
15	1250,00
20	769,23

x	$p(x)$
1	10 007,00
750	20,33
1250	15,00
2500	11,00
5000	9,00
10000	8,00

Me kan plotta punkta og dra ei kurve gjennom dei på frihand.



Øvingsoppgåve 1.40. Ta pris- og produksjonsfunksjonane som du fann i oppgåve 1.36 og 1.38 og plott dei i eit rutenett.

Merknad 1.7. Me har funne to funksjonar $p(x)$ (oppgåve 1.35) og $x(p)$ (oppgåve 1.37). Dei to er *inverse funksjonar*. Den eine reknar frå pris til produksjonsvolum, og den andre reknar tilbake.

Merknad 1.8. Dei to funksjonane

$$p(x) = 22 - \frac{10\,000}{x}, \tag{1.8}$$

$$x(p) = \frac{10\,000}{22 - p}, \tag{1.9}$$

er døme på *rasjonale funksjonar*. Det ser fordi variabelen (hhv. x og p dukkar opp under brøkstreken).

Kravet til ein rasjonal funksjon er at han kan skrivast som ein brøk med polynom over og under streken. Dette ser me umiddelbart for $x(p)$, medan $p(x)$ kan skrivast om som ein brøk for å tydleggjera det:

$$p(x) = 22 - \frac{10\,000}{x} = \frac{22x - 10\,000}{x}.$$

1.7 Vidare lesing

Det kan vera nyttig å lesa fleire vinklingar på stoffet.

Lesing: Bjørnestad *et al*, kapittel 1.12, 1.13, 1.17 (likningar), kapittel 2.1, 2.3–2.4 (graf og funksjonar).

Merk at kapittel 2.2 er berre for spesielt interesserte.

2 Kvadratiske kostnadsfunksjonar

Til øvingstimen 3 (2. oktober 2019)**.** Me skal gjera oss ferdige med dette kapittelet denne veka.

1. Alle treng å gjera oppgåvene i avsnitt 2.1 og 2.2.

2. Alle bør gjera oppgåvene i avsnitt **??**.

3. Avsnitt **??** er for dei som treng ekstra døme.

2.1 Introduksjon

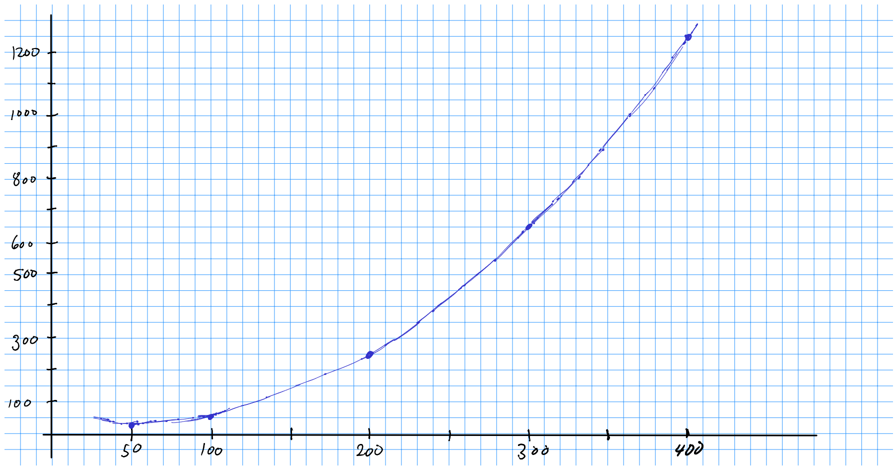
Eksempeloppgåve 2.1. Lat oss tenkja oss ei bedrift med fylgjande kostnadsfunksjon:

$$K(x) = \frac{x^2}{100} - x + 50,$$

som gjev samla produksjonskostnad når dei produserer x einingar, forutsett at $x > 50$. Skisser kostnadsfunksjonen i eit koordinatsystem.

Løysing 2.1. Når funksjonen ikkje er lineær, treng me nokre forskjellige punkt for å finna formen. Lat oss tabulera fyrst.

x	$K(x)$
50	25
100	50
200	250
300	650
400	1250



Øvingsoppgåve 2.2. Lat oss tenkja oss ei bedrift med fylgjande kostnadsfunksjon:

$$K(x) = 0{,}08 \cdot x^2 + 32 \cdot x + 4000,$$

som gjev samla produksjonskostnad når dei produserer x einingar. (Me føreset at $x > 0$.) Skisser kostnadsfunksjonen i eit koordinatsystem.

Merknad 2.1. Kostnadsfunksjonane over er døme på *kvadratiske funksjonar*, eller *andregradsfunksjonar* som dei òg vert kalt. Ein kvadratisk funksjon har formen

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Når me plottar ein kvadratisk funksjon, får me ein form som vert kalt ein *parabel*, men denne formen kjem ikkje skikkeleg til syne i løysingane over, fordi me ikkje viser negative verdiar av x.

Eksempeloppgåve 2.3. Lat oss tenkja oss ei bedrift med fylgjande kostnadsfunksjon:

$$K(x) = \frac{x^2}{100} - x + 50,$$

som gjev samla produksjonskostnad når dei produserer x einingar, forutsett at $x > 50$.

1. Sett at bedrifta produserer $x = 100$ einingar. Kor mykje ekstra kostar det å auka produksjonen til 101?

2. Sett at bedrifta produserer $x = 500$ einingar. Kor mykje ekstra kostar det å auka produksjonen til 501?

Løysing 2.2. Lat oss rekna ut kostnaden for dei ulike produksjonsvoluma. Me skriv $\Delta K = K(x+1) - K(x)$ for kostnadsendringa.

x	$x+1$	$K(x+1)$	$K(x)$	ΔK
100	101	51,01	50	1,01
500	501	2059,01	2050	9,01

Rekneregel 2.1 Rekneregel: Løysing av andregradslikning.

Når ei likning er gjeve som

$$0 = ax^2 + bx + c, \tag{2.1}$$

er løysinga gjeve som

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dersom uttrykket $b^2 - 4ac$ er negativt, er rotuttrykket ikkje definert og likninga har inga løysing.
Formen (2.1) kan me kalla for standardformen for ei andregradslikning.

Det kostar altso kr. 1,01 å auka produksjonen frå 100 til 101, og kr. 9,01 frå 500 til 501.

Merknad 2.2. Med lineære kostnadsfunksjonen hadde me variable kostnader som utgjorde eit fast beløp per produsert eining. Det er interessant å sjå at dette ikkje er tilfelle med kvadratiske funksjonar.

Øvingsoppgåve 2.4. Lat oss tenkja oss ei bedrift med fylgjande kostnadsfunksjon:

$$K(x) = 0{,}08 \cdot x^2 + 32 \cdot x + 4000,$$

som gjev samla produksjonskostnad når dei produserer x einingar. (Me føreset at $x > 0$.)

1. Sett at bedrifta produserer $x = 20$ einingar. Kor mykje ekstra kostar det å auka produksjonen til 21?
2. Sett at bedrifta produserer $x = 40$ einingar. Kor mykje ekstra kostar det å auka produksjonen til 41?

2.2 Balanse: den kvadratiske likninga

Eksempeloppgåve 2.5. Lat oss tenkja oss ei bedrift med fylgjande kostnadsfunksjon:

$$K(x) = \frac{x^2}{100} - x + 50.$$

Kostnadsfunksjonen gjev samla produksjonskostnad når dei produserer x einingar, forutsett at $x > 50$. Bedrifta sel produktet for ei krone per eining. Kor mykje skal dei produsera og selja for å gå akkurat i balanse?

Løysing 2.3. Me har berre fått oppgjeve kostnadsfunksjonen $K(x)$ og ikkje inntektsfunksjonen $I(x)$. Me har derimot prisen $p = 1$, so me kan skriva

$$I(x) = x.$$

Balansepunktet er gjeve som $K(x) = I(x)$, eller

$$\frac{x^2}{100} - x + 50 = x.$$

Dette er ei andregradslikning sidan alle ledda er anten konstante (uavhengige av x), eller ein konstant gonga med x eller x^2. Likninga er derimot ikkje på standardform, og me må rydda opp før me kan bruka formelen (Rekneregel 2.1).

Me trekk frå x på båe sider av likninga og får

$$\frac{x^2}{100} - 2 \cdot x + 50 = 0.$$

Me kan òg setja x^2 utanfor brøken:

$$\frac{1}{100} \cdot x^2 - 2 \cdot x + 50 = 0.$$

No er det lett å sjå at me har standardformen med $a = 1/100$, $b = -2$ og $c = 50$.

Innsetjing gjev

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{100} \cdot 50}}{2 \cdot \frac{1}{100}}.$$

Me kan rekna ut dei ulike ledda og få

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-2}}{\frac{1}{50}},$$

eller

$$x = 100 \pm 50 \cdot \sqrt{2} \approx 100 \pm 70{,}71,$$

Dette gjev to nullpunkt, $x \approx 29{,}3$ og $x \approx 170{,}7$, men oppgåva føreset $x > 50$ for at kostnadsfunksjonen skal vera gyldig, so berre den siste løysinga er gyldig.

Bedrifta går i balanse når dei produserer 170,7 liter.

Øvingsoppgåve 2.6. Lat oss tenkja oss ei bedrift med fylgjande kostnadsfunksjon:

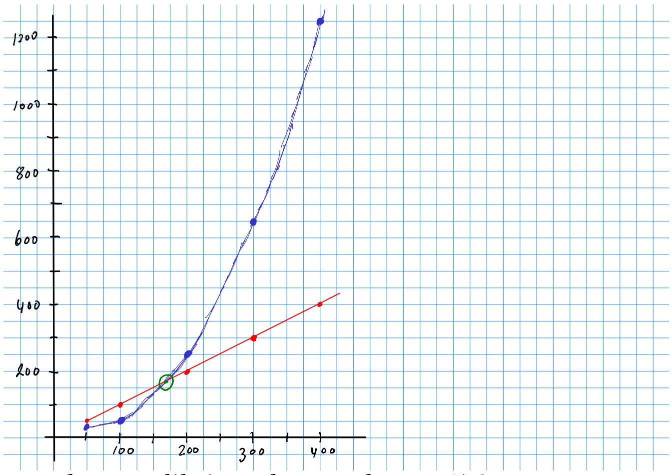
$$K(x) = -0{,}05x^2 + 80 \cdot x + 320,$$

som gjev samla produksjonskostnad når dei produserer x einingar. Bedrifta sel produktet for 80 kroner per eining. Kor mykje skal dei produsera og selja for å gå akkurat i balanse?

Eksempeloppgåve 2.7. Plott inntekts- og kostnadsfunksjonane frå oppgåve 2.5. Finn punktet der drifta går i balanse og samanlikn med løysinga som du fann i oppgåve 2.5.

Løysing 2.4. Det enklaste og tryggaste er å tabulera funksjonsverdiane for nokre verdiar av x. Merk at me ikkje ser på $x < 50$, sidan kostnadsfunksjonen ikkje er gyldig for små verdiar av x.

x	$K(x)$	$I(x)$
50	25	50
100	50	100
200	250	200
300	650	300
400	1250	400



Me finn skjæringspunktet der kostnadene er lik inntekta, ved $x \approx 170$ som stemmer godt med rekninga vår tidlegare.

Øvingsoppgåve 2.8. Plott inntekts- og kostnadsfunksjonane frå oppgåve 2.6. Finn punktet der drifta går i balanse og samanlikn med løysinga som du fann i oppgåve 2.6.

Eksempeloppgåve 2.9. Finn profittfunksjonen $P(x)$ for bedrifra i oppgåve 2.5.

1. Plott $P(x)$.
2. Løys likninga $P(x) = 0$ og markér løysinga i plottet.
3. Samanlikn med løysingane på oppgåve 2.5 og 2.7. Se særleg på grafane. Kva ser du?

Løysing 2.5. Me har profittfunksjonen

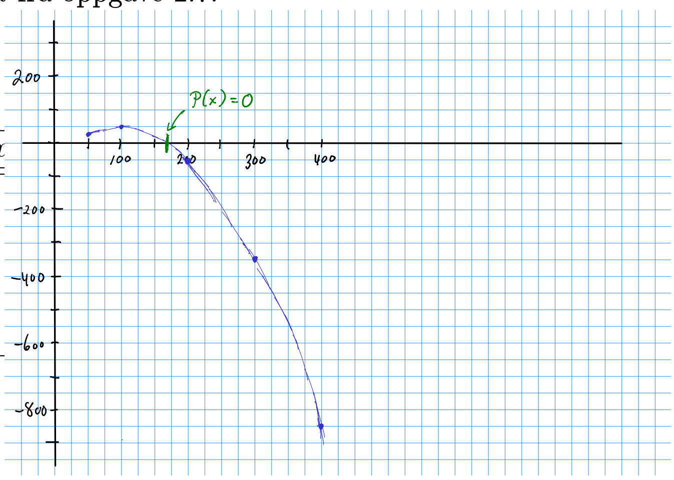
$$P(x) = I(x) - K(x) = x - \left(\frac{x^2}{100} - x + 50\right),$$

som me kan forenkla til

$$P(x) = -\frac{x^2}{100} + 2x - 50.$$

Her er det greitt å fylgja mynsteret frå oppgåve 2.7:

x	$K(x)$	$I(x)$	$P(x) = I(x$
50	25	50	25
100	50	100	50
200	250	200	−50
300	650	300	−350
400	1250	400	−850



Me skal løysa likninga

$$0 = P(x) = -\frac{x^2}{100} + 2x - 50.$$

Det er ofte meste behageleg å ha positiv fyrstegradskoeffisiet, so me gongar med -1 på båe sider og får

$$0 = \frac{x^2}{100} - 2x + 50,$$

som allereie har standardformen med $a = 1/100$, $b = -2$ og $c = 50$, og formelen gjev

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{100} \cdot 50}}{2 \cdot \frac{1}{100}}.$$

Me kan rekna ut dei ulike ledda og få

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-2}}{\frac{1}{50}},$$

eller

$$x = 100 \pm 50 \cdot \sqrt{2} \approx 100 \pm 70{,}71,$$

Dette gjev to nullpunkt, $x \approx 29{,}3$ og $x \approx 170{,}7$, men kostnadsfunksjonen føreset $x > 50$, so berre den siste løysinga er gyldig.

Ikkje berre finn me det same nullpunktet som i oppgåve 2.5, men me har løyst den eksakt same likninga på standardform. Nullpunktet (krysningspunktet med x-aksen) i plottet ligg på $x \approx 170$ som før.

Øvingsoppgåve 2.10. Finn profittfunksjonen $P(x)$ for bedrifra i oppgåve 2.6.

1. Plott $P(x)$
2. Løys likninga $P(x) = 0$ og markér løysinga i plottet.
3. Samanlikn med løysingane på oppgåve 2.6 og 2.8. Kva ser du?

Merknad 2.3. Løysingane på likninga $P(x)$ kallar me for *nullpunkta* åt funksjonen $P(x)$.

2.3 Balanse og overskot: ulikskapen

??

Eksempeloppgåve 2.11. Lat oss tenkja oss ei bedrift med fylgjande kostnadsfunksjon:

$$K(x) = \frac{x^2}{100} + 100 \cdot x - 500,$$

som gjev samla produksjonskostnad når dei produserer x einingar, forutsett at $x \geq 10$. Bedrifta sel produktet for 200 kroner per eining. Kor mykje må dei produsera for å gå med overskot?

Løysing 2.6. Me må fyrst finna profittfunksjonen. Inntektsfunksjonen er $I(x) = 200x$, og profittfunksjonen vert då

$$P(x) = I(x) - K(x) = 200x - \left(\frac{1}{100} \cdot x^2 + 100 \cdot x - 500\right).$$

Når me løyser opp parentesane, får me

$$P(x) = 200x - \frac{1}{100} \cdot x^2 - 100 \cdot x + 500.$$

Dei to fyrstegradsledda ($200x$ og $-100x$) kan me slå saman, og skriva

$$P(x) = -\frac{1}{100} \cdot x^2 + 100 \cdot x + 500.$$

Me skal finna dei x-verdiane som gjev overskot, dvs. $P(x) > 0$. Dette er ein ulikskap.

Lat oss fyrst finna nullpunkta, $P(x) = 0$, der bedrifta går i balanse. Me bruker formelen med $a = -1/100$, $b = 100$ og $c = 500$.

$$x = \frac{-100 \pm \sqrt{100^2 - 4 \cdot \frac{-1}{100} \cdot 500}}{2 \cdot \frac{-1}{100}}$$

Dersom me gongar med -50 over og under streken, får me

$$x = 50 \cdot 100 \pm 50 \cdot \sqrt{100^2 - 4 \cdot \frac{-1}{100} \cdot 500}.$$

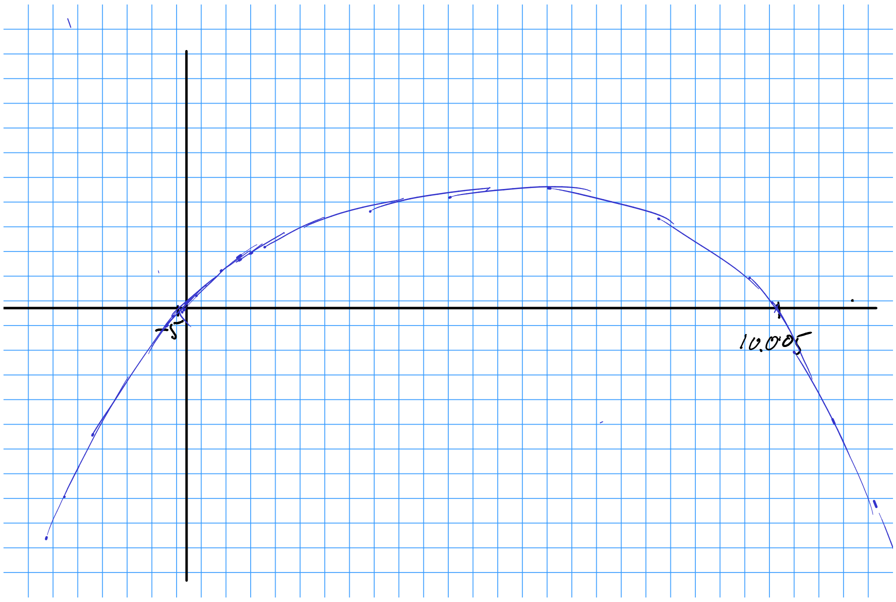
Med litt hjelp av kalkulator, får me

$$x = 5000 \pm 50 \cdot \sqrt{10000 + 20} = 5000 \pm 5005{,}0.$$

Lat oss no skissera funksjonen for å sjå kvar profitten er positiv.

Løysinga av andregradslikninga fortel oss at profittfunksjonen kryssar x-aksen to gongar, for $x = 10\,005{,}0$ og for $x = -5{,}0$. Me kan merka dei to punkta fyrst.

Det neste me skal merka oss er at når x vert svært stor ($x \to \infty$), so veks $x^2/100$ mykje raskare enn $100x$, og $x^2/100$ har negativt forteikn. Difor har me $P(x) \to -\infty$ når $x \to \infty$. Det same skjer når $x \to -\infty$. Me har altso underskot både til venstre for $-5{,}0$ og til høgre for $10\,005{,}0$.



Sidan me veit korleis ein parabel ser ut, veit me at $P(x)$ byter forteikn i nullpunkta. Alternativt, om me er i tvil, kan me sjekka ein verdi mellom nullpunkta. Det plar vera lett å sjekka for $x = 0$; me får $P(x = 0) = 500$.

No skal me hugsa at kostnadsfunksjonen for bedrifta berre var definert for $x \geq 10$. Dermed fylgjer det at bedrifta går med overskot for $10 \leq x < 10\,005{,}0$.

Øvingsoppgåve 2.12. Lat oss tenkja oss ei bedrift med fylgjande kostnadsfunksjon:

$$K(x) = -\frac{x^2}{240} + 20 \cdot x + 200,$$

som gjev samla produksjonskostnad når dei produserer x einingar. Bedrifta sel produktet for 18 kroner per eining. Kor mykje må dei produsera for å gå med overskot?

2.4 Om å skyta med kanon

??

Eksempeloppgåve 2.13. Ein kanon skyt ut kula i ein fart av 495 m/s i 45° vinkel over flat mark. Dette gjev ein fart på 350 m/s i høgderetninga (kula stig med 350 meter i sekundet). Kanonmunninga er to meter over bakken. Fysikarane har vist at høgda i meter over bakken etter t sekund kan skrivast som

$$h(t) = 2 + 350 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2.$$

Kor lang tid går der før kanonkula treff bakken?

Løysing 2.7. Her er det mykje fysikk og detaljar som me ikkje treng. Det einaste me treng er uttrykket $h(t)$ for avstanden mellom kula og bakken etter t sekund. Me skal finda tidspunktet t når kula treff bakken, dvs. når $h(t) = 0$. Mao. løyser me likninga

$$0 = 2 + 350 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2.$$

Me kan løysa med formelen, men for å vera sikker på at me bruker han rett, skal me reinskriva likninga slik at koeffisientane a, b og c kjem i rett orden

$$0 = -4{,}905 \cdot t^2 + 350 \cdot t + 2.$$

Då har me $a = -4{,}905$, $b = 350$ og $c = 2$ og set inn i formelen:

$$t = \frac{-350 \pm \sqrt{(-350)^2 - 4 \cdot (-4{,}905) \cdot 2}}{2 \cdot (-4{,}905}.$$

Når me gongar ut dei ulike ledda, får me

$$t = \frac{-350 \pm \sqrt{122\,539{,}24}}{-9{,}81} = \frac{-350 \pm 350{,}056}{-9{,}81}.$$

Her ser me to løysingar. Den negative løysinga $t = -0{,}056/(-9{,}81)$ er meiningslaus, sidan det er *før* skotet vart avfyrt. Berre den positive løysinga gjev meining:

$$t = \frac{-700{,}056}{-9{,}81} \approx 71{,}36.$$

Det tek altso 71,4 sekund før kanonkula treff bakken.

Øvingsoppgåve 2.14. Jonas står på toppen av Eiffeltårnet og kastar stein, 300 meter over bakken. Han kastar rett ut slik at utgangsfarten er 30 m/s nøyaktig horisontalt. Høgda $h(t)$ over bakken er gjeve som funksjonen

$$h(t) = 300 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2,$$

der t er tida frå kastet i sekund. Kor lang tid går før steinen treff bakken?

Eksempeloppgåve 2.15. Lat oss sjå igjen på kanonkula frå oppgåve 2.13. Kula vart skoten i 45° vinkel med utgangshastighet 495 m/s. Dette gjev ein fart på 350 m/s i høgderetninga og likeeins 350 m/s horisontalt. Sjå bort frå luftmotstand, slik at hastigheita langs bakken er konstant (inntil kula treff). Kanonmunninga er to meter over bakken. Kor langt frå kanonen treff kula bakken (i meter)?

Løysing 2.8. Me fann ut i oppgåve 2.13 at kula er i lufta i 71,4 sekund. Hastigheita langs bakken er 350 m/s gjennom heile flukta. Den vertikale hastigheita er uvesentleg for rørsla langs bakken. Gangar me tid med hastigheit får me avstand som fylgjer:

$$71{,}4\text{s} \cdot 350\text{m/s} = 71{,}4 \cdot 350\text{m} = 24\,990{,}0\text{m}.$$

Kula går altso 24 990 meter før ho landar.

Øvingsoppgåve 2.16. Jonas står på toppen av Eiffeltårnet og kastar stein, 300 meter over bakken. Han kastar rett ut slik at utgangsfarten er 30 m/s nøyaktig horisontalt. Høgda $h(t)$ over bakken er gjeve som funksjonen

$$h(t) = 300 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2,$$

der t er tida frå kastet i sekund. Kor langt går steinen før han landar, målt frå bakken rett under Jonas? (Bruk løysinga di frå oppgåve 2.14 som mellomrekning.)

2.5 Vidare lesing

Det kan vera nyttig å lesa fleire vinklingar på stoffet.

Lesing: Bjørnestad *et al*, kapittel 1.14 (kvadratiske likningar), kapittel 2.5 (kvadratisk funksjon) og 2.8 (kostnads- og inntektsfunksjon).

3 Grensekostnad

Til øvingstimen 4 (7. oktober 2019). I dag skal de gjera oppgåvene i avsnitt 3.1 og 3.2.

Dersom de har tid til overs, so er der sikkert fleire oppgåver i kapittel 2 som de kan gjera.

Til øvingstimen 5 (9. oktober 2019). I dag skal de gjera oppgåvene i avsnitt 3.3 og 3.4, og helst, dersom de har tid, avsnitt 3.5.

Dersom de har tid til overs, kan de ta fatt på læreboka kapittel 3.3-3.4. Det kan vera naudsynt å lesa kapittel 3.1-3.2 òg, for å forstå kapittel 3.3-3.4.

3.1 Stigningstal og grensekostnaden

For lineære kostnadsfunksjonar $K(x) = ax+b$ såg me at stigningstalet er ekstrakostnaden ved å auka produksjonen med éi eining. Dette kalla me for grensekostnaden, som er konstant uansett produksjonsvolum. Kvadratiske kostnadsfunksjonar har ikkje konstant stigningstal, men grensekostnaden er definert like fullt.

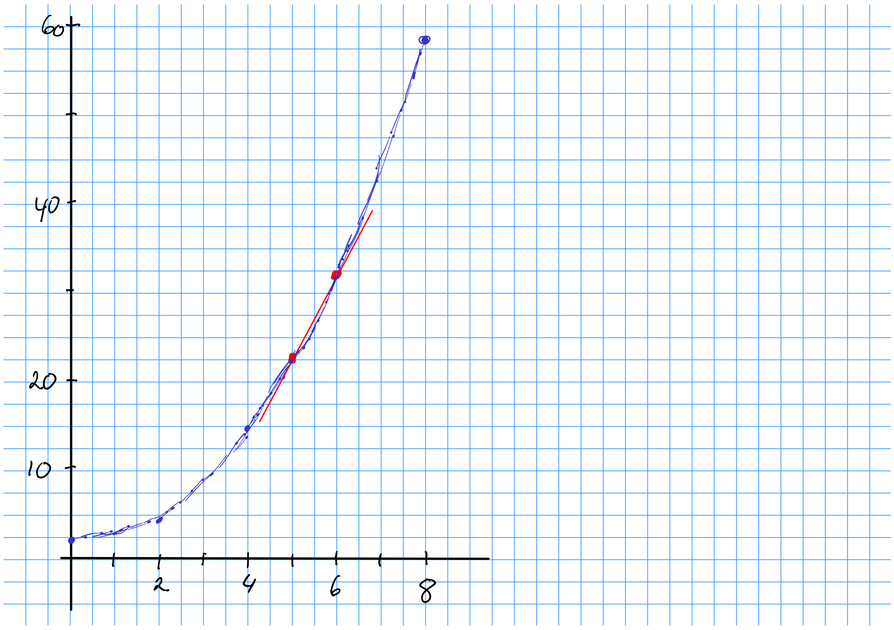
Eksempeloppgåve 3.1. Lat oss ta kostnadsfunksjonen

$$K(x) = x^2 - x + 2.$$

Me tenkjer oss at bedrifta sel (t.d.) mjøl i lausvekt. Når dei aukar produksjonen, so treng dei ikkje auka med ein heil kilo; dei kan auka med eit gram, eit milligram, eit mikrogram eller ein kvan lita storleik du kan tenkja deg.

1. Plott $K(x)$ på intervallet $x = 0 \ldots 8$.
2. Marker kostnaden for $x = 5$ på kurva.
3. Marker kostnaden for $x = 6$ på kurva, og dra ei rett line gjennom kostnadene for $x = 5$ og $x = 6$. Kva er stigningstalet på denne lina?
4. Rekn ut kostnaden ved å auka produksjonen frå $x = 5$ til $x = 6$.

Løysing 3.1. Me reknar ut $K(x)$ for $x = 0, 2, 4, 6, 8$ og markerer verdiane direkte i plottet, som under. Resten av plottet gjer me på frihand:



For å finna eksakt endringskostnad, må me setja inn tal og rekna, som fylgjer

$$K(5) = 5^2 - 5 + 2 = 22 \tag{3.1}$$
$$K(6) = 6^2 - 6 + 2 = 32 \tag{3.2}$$
$$\Delta K = K(6) - K(5) = 32 - 22 = 10. \tag{3.3}$$

Ekstrakostnaden når produksjonen aukar frå fem til seks einingar er ti.

Øvingsoppgåve 3.2. Lat oss ta kostnadsfunksjonen

$$K(x) = -\frac{x^2}{10} + 4x + 1.$$

Varane vert selde i lausvekt slik at x kan ta vilkårlege verdiar, ikkje berre heiltalsverdiar.

1. Plott $K(x)$ på intervallet $x = 0 \ldots 8$.
2. Marker kostnaden for $x = 5$ på kurva.
3. Marker kostnaden for $x = 6$ på kurva, og dra ei rett line gjennom kostnadene for $x = 5$ og $x = 6$. Kva er stigningstalet på denne lina?
4. Rekn ut kostnadauka ΔK når produksjonen aukar frå $x = 5$ til $x = 6$.

Merknad 3.1 (Delta)**.** Den greske bokstaven Δ (uttalt D på gresk) er hyppig brukt som symbol for endring i matematikken. Difor skriv me Δx for ei endring i x og ΔK for ei endring i $K(x)$.

Merknad 3.2 (Kontinuerleg og diskret funksjon)**.** I matematikken skil me gjerne mellom diskrete og kontinuerlege funksjonar. Ein *diskret* vare er ein vare som må teljast, t.d. klesplagg eller bilar. Ingen vil ha ein halv bil eller 0,1324 jakker. Andre varer vert målte *kontinuerleg*, t.d. øl (i liter) eller mjøl (i kilo).

Merknad 3.3. Mykje av matematikken som me lærer gjev berre meining for kontinuerlege funksjonar. Oppgåvene under gjev til dømes ikkje meining dersom bedrifta sel bilar. Når ein sel bilar er kostnadsfunksjonen $K(x)$ diskret, sidan x må vera eit heiltal.

Det er likevel vanleg å tenkja kontinuerleg når ein løyser modeller, for so å tolka løysinga til slutt, med tanke på den diskrete røynda. Dette må ein tenkja på når ein bruker matematikk på praktiske problem.

Merknad 3.4 (Diskret tid)**.** Renterekning er eit anna døme på diskrete funksjonar. Når rentene vert rekna ut periodevis, slik som er vanleg, vert tida i rentemodellen diskret. Tida vert tald i periodar, og ikkje målt i sekund.

Kontinuerleg forrenting er ei matematisk oppfinning for å unngå utfordringane med diskret tid.

Eksempeloppgåve 3.3. Me skal sjå vidare på kostnadsfunksjonen frå oppgåve 3.1:

$$K(x) = x^2 - x + 2.$$

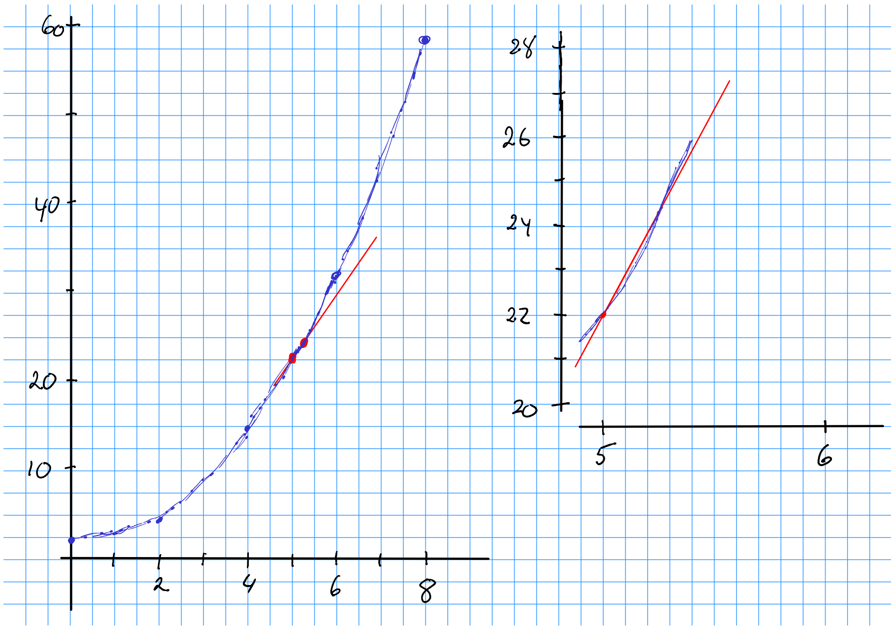
1. Plott $K(x)$ på intervallet $x = 0 \ldots 6$.

2. Marker kostnaden for $x = 5$ på kurva.

3. Marker kostnaden for $x = 5{,}2$ på kurva, og dra ei rett line gjennom kostnadene for $x = 5$ og $x = 5{,}2$. Kva er stigningstalet på lina?

4. Rekn ut ekstrakostnaden ΔK ved å auka produksjonen frå $x = 5$ til $x = 5{,}2$. Samanlikn med stigningstalet.

Løysing 3.2. Me teiknar plottet som me gjorde i forrige døme. Det er vanskeleg å sjå nøyaktig kva som skjer, so me teiknar ein versjon i større skala, der me berre tek med det interessante området. Då er det mogleg, so vidt, å sjå korleis lina krysser kurva to gongar.



I figuren kan me sjå at lina gjennom dei to punkta har stigningstal om lag 9,2.

For å finna kostnadsauka, må me fyrst finna kostnaden i dei to punkta me er interesserte i. Då får me:

$$K(5) = 5^2 - 5 + 2 = 22 \tag{3.4}$$

$$K(5{,}2) = 5{,}2^2 - 5{,}2 + 2 = 23{,}84 \tag{3.5}$$

$$K(5{,}2) - K(5) = 23{,}84 - 22 = 1{,}84. \tag{3.6}$$

Det går an å sjå at stigningstalet er fem gongar kostnadsauka.

$$5 \cdot 1{,}84 = 9{,}2.$$

Det heng saman med at produksjonsauka, frå 5 til 5,2, er på ein femtedels eining, eller 0,2. Stigningstalet skal då vera

$$\frac{1{,}84}{0{,}2} = 9{,}2,$$

som me såg stemmer.

Øvingsoppgåve 3.4. Me skal sjå vidare på kostnadsfunksjonen frå oppgåve 3.2:

$$K(x) = -\frac{x^2}{10} + 4x + 1.$$

1. Plott $K(x)$ på intervallet $x = 0 \ldots 6$.

2. Marker kostnaden for $x = 5$ på kurva.

3. Marker kostnaden for $x = 5{,}2$ på kurva, og dra ei rett line gjennom kostnadene for $x = 5$ og $x = 5{,}2$. Kva er stigningstalet på lina?

4. Rekn ut kostnaden ved å auka produksjonen frå $x = 5$ til $x = 5{,}2$. Samanlikn med stigningstalet.

Merknad 3.5 (Sekant)**.** Dei rette linene som me har teikna i oppgåvene over vert kalla *sekantar*. Dei skjærer kurva i to punkt.

Merknad 3.6. Det gjeld generelt at stigningstalet åt sekanten er lik kostnadsauka *per eining*, når produksjonen aukar frå det eine til det andre skjæringspunktet på kurva. Når sekanten kryssar for produksjonsvoluma x_1 og x_2, finn me altso stigningstalet som

$$a = \frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{K(x_2) - K(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Eksempeloppgåve 3.5. Me skal sjå vidare på kostnadsfunksjonen frå oppgåve 3.1 og 3.3:

$$K(x) = x^2 - x + 2.$$

Me skal studera kostnaden ved ørsmå produksjonsauker.

Ta utgangspunkt i produksjonsnivået $x = 5$, og sjå på ulike produksjonsendringar Δx. Rekn ut kostnaden før $(K(x))$ og etter $(K(x + \Delta x))$, samt endringa $\Delta K = K(x + \Delta x) - K(x)$ og den relative kostnadsauka per eining $\Delta K/\Delta x$.

Løysing 3.3. Det er enklast å setja dette opp i ein tabell. Me hugsar frå tidlegare oppgåver at $K(5) = 22$.

$\Delta x = x_{\text{ny}} - 5$	x_{ny}	$K(x_{\text{ny}})$	$\Delta K = K(x_{\text{ny}}) - K(5)$	$\frac{\Delta K}{\Delta x}$
1	6	32	10	10
0,2	5,2	23,84	1,84	9,2
0,05	5,05	22,4525	0,4525	9,05
0,01	5,01	22,0901	0,0901	9,01
0,001	5,001	22,000 90	0,000 90	9,001
0,0001	5,0001	22,009 001	0,009 001	9,0001

Me ser at når $\Delta x \to 0$,[1] vil $\Delta K/\Delta x \to 9$.

Øvingsoppgåve 3.6. Me skal sjå vidare på kostnadsfunksjonen frå oppgåve 3.2 og 3.4:

$$K(x) = -\frac{x^2}{10} + 4x + 1.$$

Me skal studera kostnaden ved ørsmå produksjonsauker.

Ta utgangspunkt i produksjonsnivået $x = 5$, og sjå på ulike produksjonsendringar Δx. Rekn ut kostnaden før $(K(x))$ og etter $(K(x + \Delta x))$, samt endringa $\Delta K = K(x + \Delta x) - K(x)$ og den relative kostnadsauka per eining $\Delta K/\Delta x$.

Merknad 3.7 (Tangent)**.** I oppgåva over har me studert ein sekant som skjærer kostnadskurva for eit punkt x og eit anna punkt $x + \Delta x$, for ei lita endring Δx. Når $\Delta x \to 0$ nærmer sekanten seg ein *tangent*, som rører ved kurva i eitt punkt.

[1]Pilen $\to$ vert lese som «går mot» eller «nærmar seg».

Merknad 3.8. Stigningstalet åt sekanten er

$$a = \frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{K(x+\Delta x) - K(x)}{\Delta x}.$$

Dersom me let $\Delta x \to 0$, vil a nærma seg stigningstalet åt tangenten.

Merk at me ikkje kan setja $\Delta x = 0$, fordi me då deler på null. Likevel kan ein studera kva som skjer når $\Delta x \to 0$.

Merknad 3.9. Når me har ein funksjon og ein tangent som rører ved funksjonen for ein bestemt verdi av x, so seier me at stigningstalet åt tangenten er *den deriverte av funksjonen i punktet* x.

3.2 Den deriverte som ein funksjon

I forrige avsnitt vart me kjende med *den deriverte*, stigningstalet på ei kurve som ikkje treng vera rak, i eit bestemt punkt. På ei krum kurve varierer stigningstal langs kurva. Når $f(x)$ er ein funksjon, skriv me gjerne $f'(x)$ for stigningstalet. Sidan stigningstalet varierer med x, er òg $f'(x)$ ein funksjon.

Merknad 3.10. Den deriverte $f'(x)$ kan me tenkja på som stigningstalet åt $f(x)$, eller, for å vera pirkut, som stigningstalet åt ein tangent til kurva åt $f(x)$ i punktet x.

Dersom $f(x)$ er ein kostnadsfunksjon, kallar me $f'(x)$ for *grensekostnaden*.

Eksempeloppgåve 3.7. Lat oss sjå vidare på grensekostnaden for bedrifta i forrige avsnitt. Kostnadsfunksjonen var

$$K(x) = x^2 - x + 2.$$

Me skriv $K'(x)$ for stigningstalet (grensekostnaden) åt $K(x)$.

Bruk plottet som du har av $K(x)$, og estimer stigningstalet $K'(x)$ på augemål, for $x = 1, 2, 3, 4$.

Løysing 3.4.

Rekneregel 3.1 Rekneregel: Derivasjon av kvadratisk funksjon.

Lat $f(x) = ax^2+bx+c$ vera ein kvadratisk funksjon. Då er den deriverte gjeven som

$$f'(x) = a \cdot 2 \cdot x + b$$

Tangenten for $x = 1$ (raud til venstre) ser ut til å stiga ei halv rute, eller 1,25, x går frå 0 til 1. Det gjev eit stiningstal på litt meir enn 1.

Tangenten for $x = 2$ (grøn) stig cirka ei rute (2,5) når x går frå 2 til 3. Det gjev eit stigningstal på 2,5.

Tangenten for $x = 3$ (cyan) stig nesten to ruter (5) når x går frå 3 til 4. Det gjev eit stigningstal på mellom 4 og 5.

Tangenten for $x = 4$ (raud til høgre) ser ut til å stiga knapt tre ruter, eller 7,5, x går frå 3,5 til 4,5. Det gjev eit stiningstal på vel 7.

Øvingsoppgåve 3.8. Sjå på plottet som du har av kostnadsfunksjonen

$$K(x) = -\frac{x^2}{10} + 4x + 1$$

frå forrige avsnitt. Estimer stigningstalet $K'(x)$ på augemål, for $x = 1, 2, 3, 4$.

Eksempeloppgåve 3.9. Me har

$$K(x) = x^2 - x + 2.$$

Finn eit uttrykk for grensekostnaden $K'(x)$ ved hjelp av formelen i rekneregel 3.1. Rekn ut $K'(x)$ for $x = 1, 2, 3, 4$ og samanlink med estimata dine frå oppgåve 3.7.

Løysing 3.5. Formelen gjev

$$K'(x) = 2x - 1.$$

Når me set inn, får me

$$K'(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1, \tag{3.7}$$
$$K'(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3, \tag{3.8}$$
$$K'(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5, \tag{3.9}$$
$$K'(4) = 2 \cdot 4 - 1 = 7. \tag{3.10}$$

Estimata våre i oppgåve 3.7 ligg stort sett nær dei sanne verdiane som me no har rekna ut. Den største bommen hadde me for $x = 2$, men me ser òg at kurva var ujamnt teikna rundt dette punktet, so det er ikkje rart at tangenten òg vart litt feil.

Øvingsoppgåve 3.10. Me har

$$K(x) = -\frac{x^2}{10} + 4x + 1$$

Finn eit uttrykk for grensekostnaden $K'(x)$ ved hjelp av formelen i rekneregel 3.1. Rekn ut $K'(x)$ for $x = 1, 2, 3, 4$ og samanlink med estimata dine frå oppgåve 3.8.

Eksempeloppgåve 3.11. Tenk deg at bedrifta, som har kostnadsfuknsjonen

$$K(x) = x^2 - x + 2,$$

produserte $x = 4$ einingar i fjor. Kva må prisen vera for at det skal løna seg å auka produksjonen i år? (Bruk svara dine frå oppgåve 3.9 som mellomrekning.)

Løysing 3.6. Grensekostnaden gjev kostnadsauka for ei lita (marginal) auke i produksjonen. For å tena pengar, må prisen dekkja denne kostnaden. Me fann $K'(4) = 7$, og me treng difor ein pris større enn sju.

Øvingsoppgåve 3.12. Tenk deg at bedrifta, som har kostnadsfuknsjonen

$$K(x) = -\frac{x^2}{10} + 4x + 1$$

produserte $x = 4$ einingar i fjor. Kva må prisen vera for at det skal løna seg å auka produksjonen i år? (Bruk svara dine frå oppgåve 3.10 som mellomrekning.)

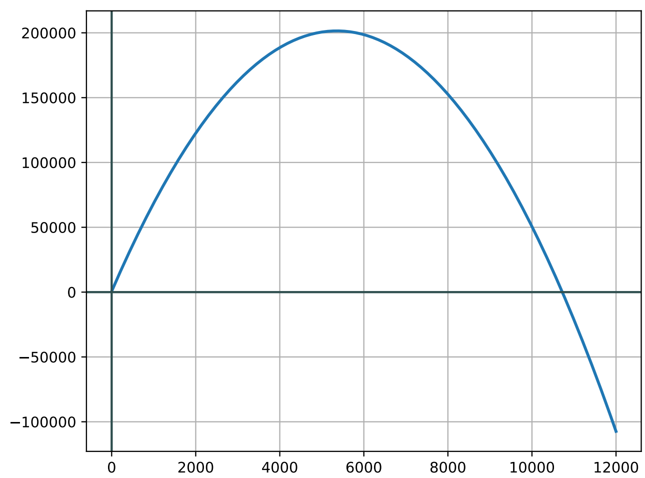
3.3 Topp- og botnpunkt

Eksempeloppgåve 3.13. Ålesund Dings og Profitt AS har rekna ut at dei har profittfunksjonen

$$P(x) = -0{,}007x^2 + 75x + 600,$$

for x produserte og solgte dingsar. Bedrifta ynskjer å maksimera profitten. Kor mange dingsar bør dei produsera og selja?

Løysing 3.7. Lat oss teikna ei skisse i full fart, for å sjå kva me arbeider med. Her har me teikna på maskin, som ei avveksling.



Lat oss tenkja over kva som skjer med den deriverte når produksjonen x aukar. Profittkurva går fyrst oppover, dvs. positivt stigningstal, og $P'(x) > 0$. Kurva flatar ut, som vil seia at stigningstalet vert mindre. På toppen går den deriverte frå å vera positiv, til å verta negativ. Mot høgre vert kurva brattare og brattare nedover, som vil seia at den deriverte vert svært negativ.

Akkurat på toppen, når den deriverte går frå positiv til negativ, er der eitt punkt der den deriverte er null. Det er toppunktet, beste moglege profitt, og det skal me finna. Me skal altso løysa likninga $P'(x) = 0$.

Lat oss fyrst derivera

$$P'(x) = -2 \cdot 0{,}007x + 75 = -0{,}014x + 75.$$

Veksta skulle vera null, so me får likninga

$$0 = -0{,}014x + 75.$$

Når me løyser, får me

$$x = \frac{75}{0{,}014} = 5357{,}14.$$

Det er ok å skriva at svaret er 5357,14.

Er me litt grundigare, hugsar me at dingsar ikkje kan delast opp. Svaret skulle difor vera anten 5357 eller 5358. Lat oss sjekka kva som er best

$$P(5357) = -0{,}007 \cdot 5357^2 + 75 \cdot 5357 + 600 = 201\,492{,}86, \tag{3.11}$$

$$P(5358) = -0{,}007 \cdot 5358^2 + 75 \cdot 5358 + 600 = 201\,492{,}85. \tag{3.12}$$

Det optimale er altso å produsera 5357 dingsar.

Øvingsoppgåve 3.14. Ørsta Fisk og Profitt AS har rekna ut at dei har profittfunksjonen

$$P(x) = -0{,}02x^2 + 100x + 120,$$

for x produserte og solgte dingsar. Bedrifta ynskjer å maksimera profitten. Kor mange dingsar bør dei produsera og selja?

Øvingsoppgåve 3.15. Ta funksjonen

$$f(x) = x^2 + 2x + 5.$$

Finn minimumspunktet, dvs. den x-verdien som gjev minst verdi for $f(x)$.

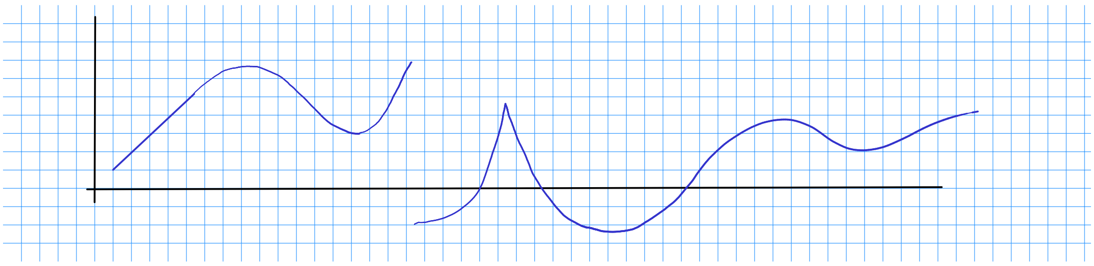
Øvingsoppgåve 3.16. Ta funksjonen

$$f(x) = x^2 - 2x - 12.$$

1. Har $f(x)$ eit topp- eller botnpunkt?
2. Finn optimum (topp- eller botnpunkt).

3.4 Derivasjon

Eksempeloppgåve 3.17. Ein funksjon $f(x)$ definerer fylgjande kurve:

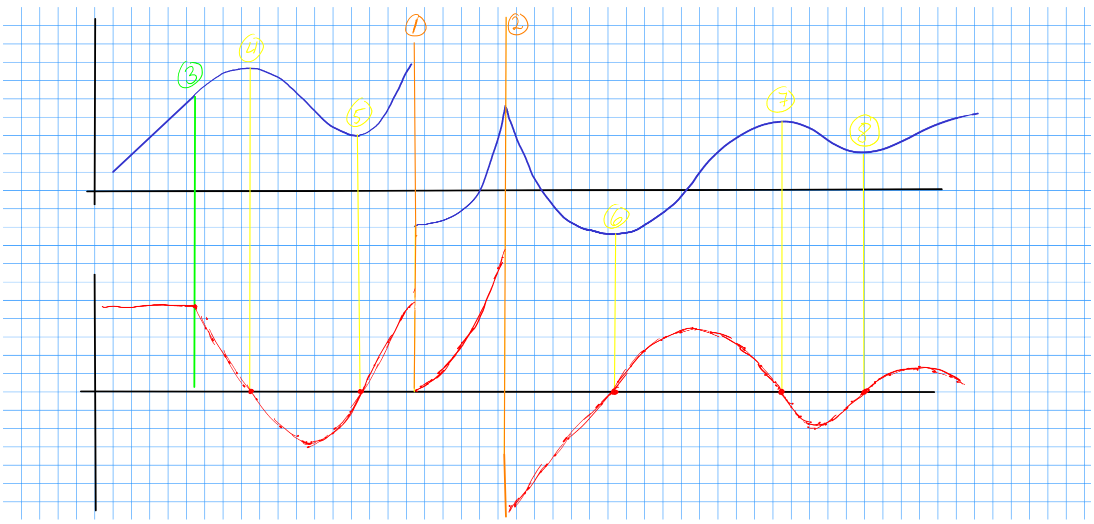


Skissér kurva for den deriverte, $f'(x)$.

Løysing 3.8. Me merker oss fleire distinkte punkt på kurva, og dei bør me merka av fyrst.

1. Kurva er diskontinerleg (1).
2. Kurva har eit knekkpunkt (2).
3. Kurva har eit slags knekkpunkt (3), der ho fyrst er lineær og so flater ut.
4. Fem topp- og botnpunkt (4-8).

I alle topp- og botnpunkta er den deriverte null, so dette kan me merka av fyrst. Me bruker raudt for den deriverte og blått for den opprinnelege funksjonen.



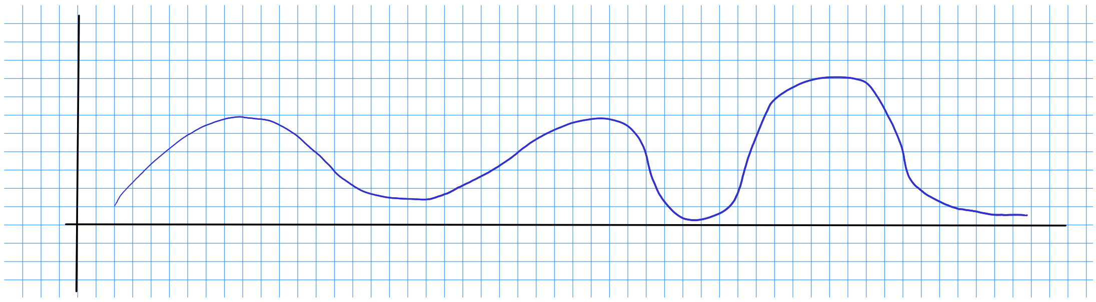
Der kurva er lineær, er stigningstalet og dermed den deriverte, konstant. Me kan altso teikna ei flat line til venstre for den grøne lina (3). Kurva stig, so den deriverte er positiv.

Til venstre for den grøne lina vert stigninga mindre ned mot null ved den gule lina (4) og vert negativ. Han snur og kryssar x-aksen ved den gule lina (5), og endar positiv ved diskontinuiteten (1).

Mellom dei oransje linene, startar den deriverte cirka på null, og stigningtalet stig. Ved knekkpunktet (2) går kurva brått frå å stiga til å falla, so den deriverte vert diskontinuerleg og held fram under x-aksen.

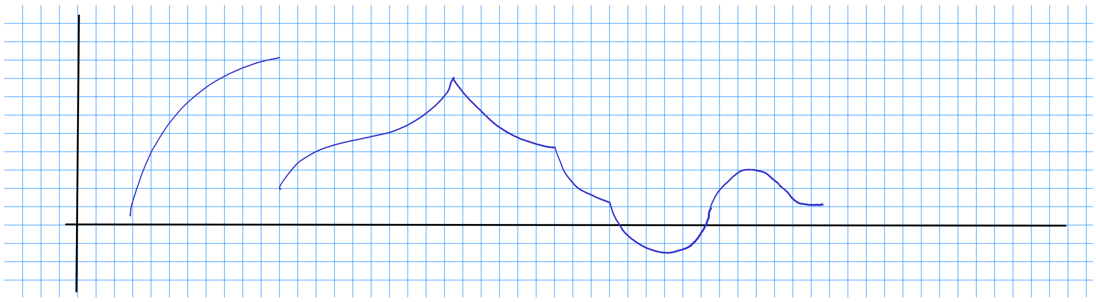
Det siste stykket er relativt enkelt å teikna. me må treffa nullpunkta som svarer til topp- og botnpunkt, og me freistar å teikna ein stor verdi for den deriverte når kurva er bratt, men det går best på augemål.

Øvingsoppgåve 3.18. Ein funksjon $g(x)$ definerer fylgjande kurve:



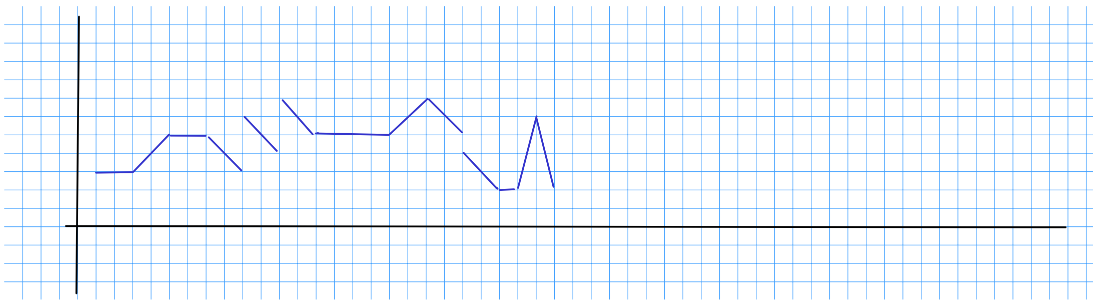
Skissér kurva for den deriverte, $g'(x)$.

Øvingsoppgåve 3.19. Ein funksjon $g(x)$ definerer fylgjande kurve:



Skissér kurva for den deriverte, $g'(x)$.

Øvingsoppgåve 3.20. Ein funksjon $g(x)$ definerer fylgjande kurve:



Skissér kurva for den deriverte, $g'(x)$.

Øvingsoppgåve 3.21. Sjå på funksjonen

$$h(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 3.$$

Plott funksjonen, for hand eller på maskin. Skisser deretter den deriverte, $h'(x)$, basert på kva du ser i plottet av $h(x)$.

Øvingsoppgåve 3.22. Sjå på funksjonen

$$f(x) = x^4 - 4x^2.$$

Plott funksjonen, for hand eller på maskin. Skisser deretter den deriverte, $f'(x)$, basert på kva du ser i plottet av $f(x)$.

3.5 Om fiskeforvalting

Eksempeloppgåve 3.23. I fiskeforvaltinga søkjer ein å regulera fisket slik at utbytet vert størst mogleg over tid. Matematiske modellar vert brukt for å forklara samanhengen mellom mengd og tilvekst av fisk i havet. Ein slik modell (frå Neher [1990]) er

$$g(b) = 0{,}005 \cdot b \cdot (100 - b),$$

som gjev tilveksten $g(b)$ (g for *growth*) for ein gjeven bestand b.

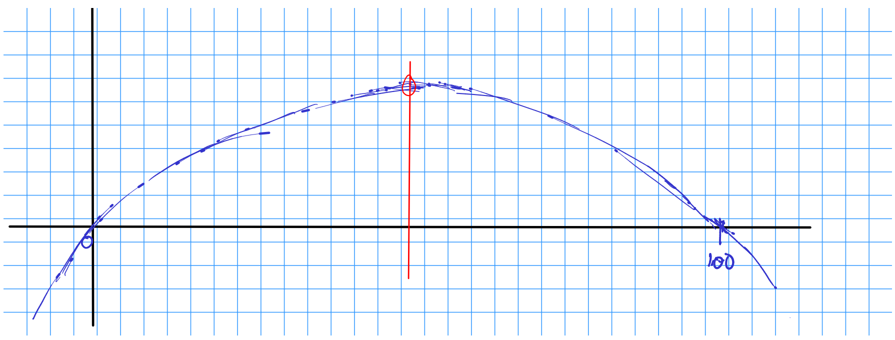
Dersom fiskeuttaket er lik tilveksten, vert bestanden stabil. Finn den bestanden b som gjev høgast tilvekst.

Løysing 3.9. Lat oss byrja med å teikna ei skisse over funksjonen

$$g(b) = 0{,}005 \cdot b \cdot (100 - b).$$

Når ein av faktorane på høgre side er null, må produktet vera null. Dermed har funksjonen nullpunkt for $b = 0$ og for $100 - b = 0$ (dvs. for $b = 100$). Desse nullpunkta markerer me i skissa.

Vidare kan me sjå at når me gongar ut parentesen $(100 - b)$, får me eit andregradsledd (b^2) med negativt forteikn. Kurva skal difor ha botnen opp.



Me skal finna toppunktet som er markert i figuren, dvs. punktet der den deriverte $g'(x) = 0$. Dersom me gangar ut parentesen er det lettera å finna den deriverte:

$$g(b) = 0{,}5 \cdot b - 0{,}005 \cdot b^2. \tag{3.13}$$
$$g'(b) = 0{,}5 - 0{,}01 \cdot b. \tag{3.14}$$

Det gjev ei likning

$$0 = 0{,}5 - 0{,}01 \cdot b, \tag{3.15}$$
$$b = \frac{0{,}5}{0{,}01} = 50. \tag{3.16}$$

Høgast tilvekst får me altso ved ein bestand på 50.

Merknad 3.11. Merk at fordi andregradsfunksjonen er symmetrisk, so må toppunktet 50 liggja midt mellom nullpunkta 0 og 100. Det er kjekt å sjå at dette stemmer me rekninga over.

Me har brukt den omstendelege løysinga med den deriverte for å øva oss til me får andre funksjonar som ikkje er symmetriske.

Øvingsoppgåve 3.24. Sjå på fylgjande vekstmodell,

$$g(b) = 0{,}002 \cdot b \cdot (150 - b) - 50,$$

der $g(b)$ er tilveksten for ein gjeven bestand b. Finn den bestanden b som gjev høgast tilvekst.

3.6 Vidare lesing

Lesing: Bjørnestad *et al*, kapittel (3.1), 3.2–3.4. Merk at presentasjonen av grenseverdiar (kapittel 3.1) er unødvendig abstrakt og vil falla tung for mange. Grenseverdinotasjonen vert brukt vidare i kapittel 3.2-3.4. Ein kjem langt med ei konseptuell forståing av derivasjon, men nokon vil ha nytte av den abstrakte og formelle forståinga i tillegg.

4 Modellering

4.1 To nullpunkt

Eksempeloppgåve 4.1. Me er bedne om å foreslå ein profittfunksjon for å modellera økonomien i ei viss bedrift. Me veit at profitten er null for produksjonsnivåa $x = 10$ og $x = 20$, og me veit at profitten er positiv når $10 < x < 20$. Kva er den enklaste moglege profittfunksjonen som tilfredstiller desse krava?

Løysing 4.1. Lat oss sjå på eit krav åt gongen. Den enklaste funksjonen som tilfredsstiller $f_1(10) = 0$, er ei rett line som kryssar x-aksen for $x = 10$, altso $f_1(x) = x - 10$. Tilsvarande for $x = 20$ finn me $f_2(x) = x - 20$.

Dersom me tek produktet av to funksjonar, t.d.

$$f_3(x) = f_1(x) \cdot f_2(x),$$

so veit me at $f(x)$ er null når minst éin av faktorane er null. Dvs. at nullpunkta åt $f(x)$ er nullpunkta åt $f_1(x)$ og åt $f_2(x)$. Funksjonen

$$f_3(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = (x - 10) \cdot (x - 20) = x^2 - 30x + 200,$$

har altso riktige nullpunkt.

Funksjonen me er på jakt etter skal vera positiv på midten, men $f_3(x)$ har eit botnpunkt mellom $x = 20$ og $x = 30$. Dersom me snur $f_3(x)$ opp/ned, får me ein modell som passar. Me bruker

$$f(x) = -f_3(x) = -x^2 + 30x - 200.$$

Merknad 4.1. Dersom algebraen i oppgåva over er tung å forstå, so løner det seg å skissera funksjonen $f_3(x)$ og bruka skissa som hjelp til å vurdera forteikn.

Det var meininga å bruka skisse i løysinga, men det var utegløymt. Orsak.

Øvingsoppgåve 4.2. Du skal modellera økonomien i ei viss bedrift. Du får vita at profitten er null for produksjonsnivåa $x = 100$ og $x = 700$. Bedrifta tener penger når $100 < x < 700$. Finn den enklaste moglege profittfunksjonen som tilfredstiller desse krava.

Øvingsoppgåve 4.3. Du skal modellera økonomien i ei viss bedrift. Du får vita at profitten er null for produksjonsnivåa $x = 50$ og $x = 150$. Bedrifta taper penger når $x = 75$. Finn den enklaste moglege profittfunksjonen som tilfredstiller desse krava.

Øvingsoppgåve 4.4. Du skal modellera økonomien i ei viss bedrift. Du får vita at profitten er null for produksjonsnivåa $x = 125$ og $x = 175$. Bedrifta taper penger når $x = 75$. Finn den enklaste moglege profittfunksjonen som tilfredstiller desse krava?

4.2 Fleire nullpunkt

Eksempeloppgåve 4.5. Finn ein funksjon $f(x)$ slik at

$$f(-3) = f(-1) = f(1) = f(3) = 0.$$

Løysing 4.2. For å finna ein funksjon med bestemte nullpunkt, kan me gonga saman funksjonar, éin for kvart nullpunkt. Dei fire nullpunkta svarer til lineære funksjonar

$$(x+3), (x+1), (x-1), (x-3).$$

Funksjonen

$$f(x) = (x+3) \cdot (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-3)$$

tilfredsstiller altso krava.

Øvingsoppgåve 4.6. Finn ein funksjon $f(x)$ slik at

$$f(-1) = f(0) = f(2) = 0.$$

Øvingsoppgåve 4.7. Finn ein funksjon $f(x)$ slik at

$$f(-4) = f(-1) = f(0) = f(2) = f(4) = 0.$$

5 Derivasjonsreglane

Til øvingstimen 6 (14. oktober 2019)**.** Gjer alle oppgåvene i dette kapittelet.
Bruk formlane frå formelarket.

Øvingsoppgåve 5.1. Finn den deriverte når

1. $f(x) = 3x + 1$
2. $f(x) = 5x - 4$
3. $f(x) = x^2$
4. $f(x) = 2x^2 + 2x + 3$
5. $f(x) = 10x^2 - 3x$

Øvingsoppgåve 5.2. Finn $f'(x)$ når

1. $f(x) = x^2 - x - 1$
2. $f(x) = 5x^2 + 2x - 12$
3. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 5$
4. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 3$
5. $f(x) = x^3 - x^2$
6. $f(x) = -x^3 + 2x^2$

Øvingsoppgåve 5.3. Derivér funksjonane

1. $f(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot x^3$
2. $f(x) = (x^3 + x + 1) \cdot (x^4 - 1)$

Øvingsoppgåve 5.4. Finn dei deriverte når

1. $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$
2. $f(x) = \frac{x^3-2x+1}{2x^2}$
3. $f(x) = 5 + x^2 + \frac{x^2+1}{x}$
4. $f(x) = x^3 + \frac{3x^2+2x+1}{x^2}$

5. $f(x) = \frac{x^3-2x+1}{x-1}$

Øvingsoppgåve 5.5. Dersom du har tid, kan du

1. gjera tilsvarande oppgåver i læreboka: oppgåve 3.14, 3.15 a-f og 3.16a, samt oppåve 3.17 a b d.
2. bla tilbake og gjera oppgåver som du har hoppa over tidlegare.

Du avgjer sjølv kva som er nyttigast for deg.

5.1 Fasit

Oppgåvene i dette kapittelet opnar ikkje for tolking og det er difor mogleg å gje ein fasit.

5.1.1 Løysing 5.1

1. $f'(x) = 3$
2. $f'(x) = 5$
3. $f'(x) = 2x$
4. $f'(x) = 4x + 2$
5. $f'(x) = 20x - 3$

5.1.2 Løysing 5.2

1. $f'(x) = 2x - 1$
2. $f'(x) = 10x + 2$
3. $f'(x) = -x + 1$
4. $f'(x) = 3x - 4x + 2$
5. $f'(x) = 3x^2 - 2x$
6. $f'(x) = -3x^2 + 4x$

5.1.3 Løysing 5.3

1. $f'(x) = (2x+2)\cdot x^3 + 3\cdot(x^2+2x+1)\cdot x^2 = 2x^4+2x^3+3x^4+6x^3+3x^2 = x^2(5x^2+8x+3)$
2. $f'(x) = (3x^2+1)\cdot(x^4-1)+(x^3+x+1)\cdot 4\cdot x^3 = 3x^6+x^4-3x^2-1+4x^6+4x^4+4x^3 = 7x^6 + 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 1$

5.1.4 Løysing 5.3

1. $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$
2. $f'(x) = \frac{2x^2(3x^2-2)-4x(x^3-2x+1)}{4x^4} = \frac{x^3+2x-2}{2x^3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
3. $f'(x) = 2x + \frac{x^2-1}{x^2}$
4. $f'(x) = 3x^2 + \frac{-2x-2}{x^3}$
5. $f'(x) = \frac{2x^3-3x^2+1}{(x-1)^2} = 2x + 1$ (Merk, den siste forenklinga er ikkje mogleg å sjå med dei teknikkane som me har lært. I og med at oppgåva ikkje bed om forenkling, er det ok å gje den fyrste formen.)

6 Funksjonsdrøfting

I dette kapittelet skal me drøfta og skissera funksjonar.

Merknad 6.1. Når me *skisserer ein funksjon* teiknar me ei grovskisse der me freistar å få dei karakteristiske punkt, som topp-, botn- og nullpunkt korrekte.

Å *drøfta* ein funksjon tyder å vurdera formen som funksjonen har, og fastsetja karakteristiske punkt som topp-, botn- og nullpunkt. Skissa vert ein visuell presentasjon av drøftinga.

Til øvingstimen 7 (16. oktober 2019)**.** Gjer i alle fall oppgåvene om andre- og tredjegradsfunkasjonar. Desse er kritiske for eksamen.

Dersom du har tid, hald fram med funksjonar på faktorisert form.

6.1 Andregradsfunksjonar

Eksempeloppgåve 6.1. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = x^2 - x.$$

Løysing 6.1. Det er greitt å ha med skjæringspunkta med aksane. Me kan sjå (ved å trekkja ein x utanfor parentes) at

$$f(x) = x(x-1).$$

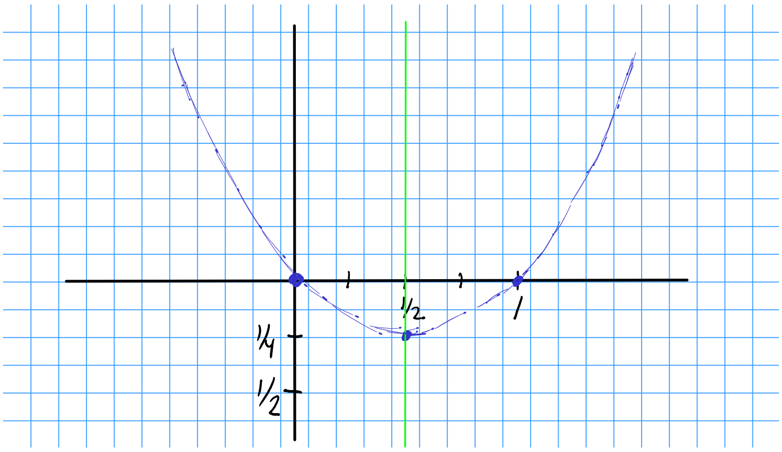
Dermed har me to nullpunkt, eitt for kvar faktor, når $x = 0$ og når $x - 1 = 0$.

Me veit at andregradsfunksjonen er symmetrisk, og symmetrilina går midt mellom nullpunkta, altso for $x = \frac{1}{2}$.

For å finna y-verdien i ekstremalpunktet, som ligg på symmetrilina, set me inn i funksjonen:

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{4}.$$

Dette er nok informasjon til å fullføra skissa.

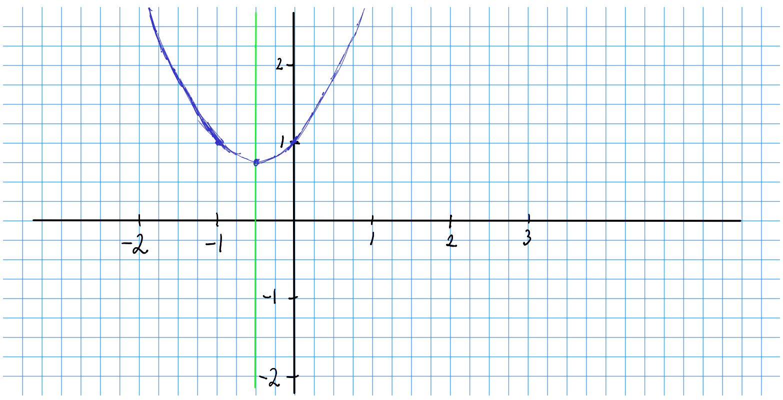


Øvingsoppgåve 6.2. Drøft og skissér funksjonen
$$f(x) = -x^2 + 1.$$

Eksempeloppgåve 6.3. Drøft og skissér funksjonen
$$f(x) = x^2 + x + 1.$$

Løysing 6.2. Det er greitt å ha med skjæringspunkta med aksane. Nullpunkta finn me ved å løysa likninga $f(x) = 0$. Formelen for andregradslikningar gjev
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$
Legg merkje til -3 under rotteiknet. Kvadratrota er ikkje definert for negative tal, og difor har funksjonen ingen nullpunkt.

Me kan finna botnpunktet ved å derivera:
$$f'(x) = 2x + 1,$$
og $f'(x) = 0$ for $x = -\frac{1}{2}$. Funksjonen er altso symmetrisk om lina $x = -\frac{1}{2}$, og funksjonsverdien i botnpunktet er
$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}.$$
Dette er eit godt utgangspunkt for å skissera.



Øvingsoppgåve 6.4. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = -x^2 + x - 1.$$

Øvingsoppgåve 6.5. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = x^2 + 2x + 1.$$

Øvingsoppgåve 6.6. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = x^2 - 2x + 3.$$

Merknad 6.2. Der er ein symmetri i formelen for å løysa andregradslikningar:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Der er to røter, éi for positivt og éi for negativ rottuttrykk. Røtene ligg symmetrisk om lina

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

Me kan alltid finna symmetrilina på denne måten, og me ser at det ville ha gjeve same svar i løysinga på oppgåve 6.3.

6.2 Tredjegradsfunksjonar

Eksempeloppgåve 6.7. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x.$$

Marker topp- og botnpunkta.

Løysing 6.3. Éin god start er å finna topp- og botnpunkt. Den deriverte er

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2.$$

Topp- og botnpunkta finn me ved å løysa

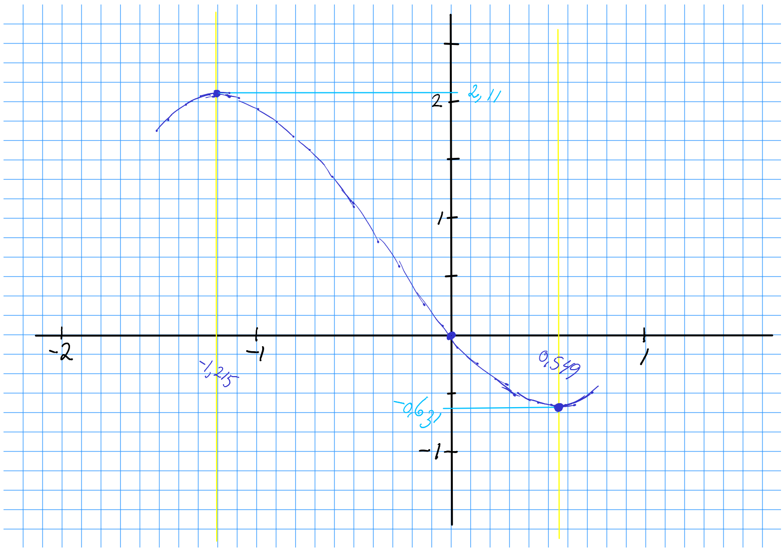
$$0 = 3x^2 + 2x - 2,$$

og formelen gjev

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 24}}{6} = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{28}}{6}.$$

Dette gjev $x = 0{,}549$ og $x = -1{,}215$. Vidare ser me at $f'(x)$ er stor (positiv) for store og små verdiar av x. Dvs. at $f(x)$ aukar fram til $-1{,}215$, fell vidare til $0{,}549$, og til slutt stig igjen.

Det er òg lett å sjå at $f(0) = 0$, so kurva må gå gjennom origo. Det ser slik ut.



Merk at me ikkje har funne dei to andre nullpunkta nøyaktig. Difor er det berre nullpunktet i origo som me har markert tydleg med ein prikk.

Øvingsoppgåve 6.8. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = -x^3 + x^2 + 2.$$

Marker topp- og botnpunkta.

Øvingsoppgåve 6.9. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = -x^3 + x^2 + 2x.$$

Marker topp- og botnpunkta.

Eksempeloppgåve 6.10. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x.$$

Marker topp- og botnpunkta og skjæringspunkta med aksane.

Løysing 6.4. Me byggjer vidare på skissa frå oppgåve 6.10, der me fann topp- og botnpunkt. No treng me skjæringspunkt med aksane.

Skjæringspunktet med y-aksen er enkelt å finna, som funksjonsverdien ved $x = 0$. Me skriv

$$f(0) = 0^3 + 0^2 - 2 \cdot 0 = 0.$$

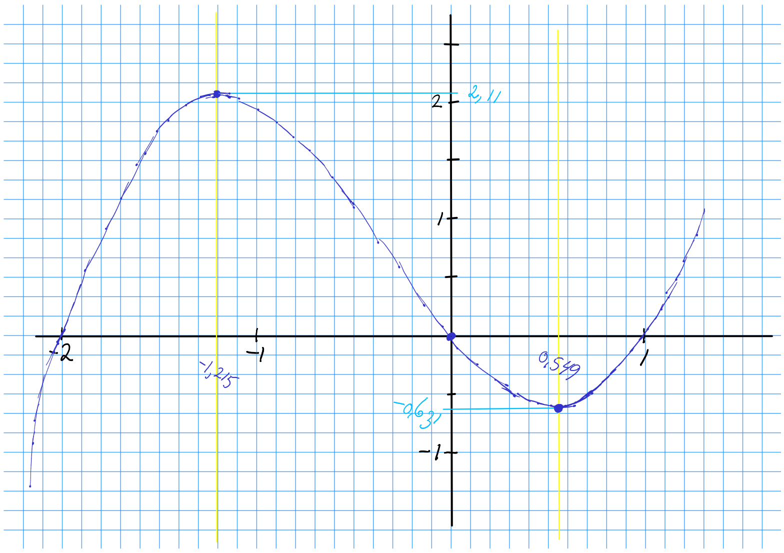
Det er generelt vanskeleg å finna nullpunkta for ein tredjegradsfunksjon, men i dette tilfellet er det enkelt. Der er ikkje noko konstantledd, og dermed kan me dra x utanfor ein parentes:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2).$$

Når $f(x) = 0$ har med altso anten $x = 0$, eller

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Andregradslikninga kan me løysa med formel, og me får $x = -2$ eller $x = 1$. Totalt har me tre nullpunkt $x = -2, 0, 1$. Me utvider skissa frå oppgåve 6.10 med ny informasjon.



Øvingsoppgåve 6.11. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = -x^3 + x^2 + 2x.$$

Marker topp- og botnpunkta og skjæringspunkta med aksane.

Eksempeloppgåve 6.12. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = x^3 - 8x^2 + 18x.$$

Marker topp- og botnpunkta og skjæringspunkta med aksane.

Løysing 6.5. Denne funksjonen har òg x i alle ledda, slik at me kan faktorisera enkelt:

$$f(x) = x \cdot (x^2 - 8x + 18).$$

Me har altso eit nullpunkt i $x = 0$. Dersom me set parentesen lik null,

$$0 = x^2 - 8x + 18,$$

og løyser med formel, får me eit negativt tal under rotteiknet, so dette andregradsuttrykket har ikkje noko nullpunkt. Det einaste skjæringspunktet mellom $f(x)$ og aksane er i origo.

Den deriverte er

$$f'(x) = 3x^2 - 16x + 18.$$

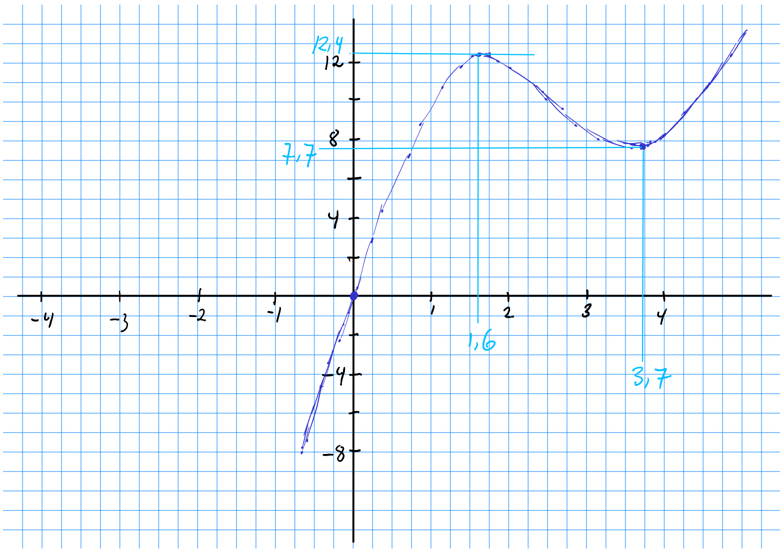
Nullpunkta (for den deriverte) er gjeve ved formelen som

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{10}}{3} = \begin{cases} 1{,}613 \\ 3{,}721 \end{cases}$$

Tilsvarande y-verdiar er

$$f(1{,}613) = 12{,}42, \tag{6.1}$$
$$f(3{,}721) = 7{,}73. \tag{6.2}$$

Me markerer topp- og botnpunkt, samt nullpunktet i origo og teiknar på frihand.



Øvingsoppgåve 6.13. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 32x.$$

Marker topp- og botnpunkta og skjæringspunkta med aksane.

Øvingsoppgåve 6.14. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = x^3 - x^2.$$

Marker topp- og botnpunkta og skjæringspunkta med aksane.

Eksempeloppgåve 6.15. Drøft og skissér funksjonen

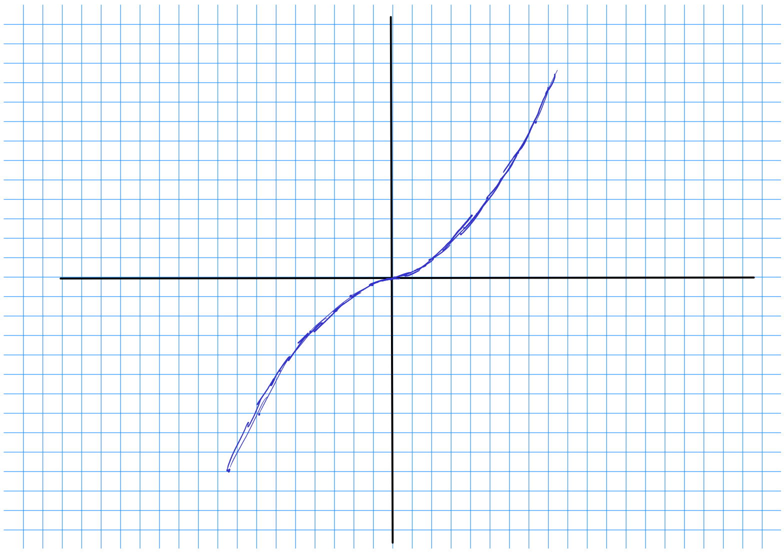
$$f(x) = x^3.$$

Marker topp- og botnpunkta og skjæringspunkta med aksane.

Løysing 6.6. Dette er ein enkel funksjon. Det er lett å sjå at funksjonen er monotont stigande og går gjennom origo. Me får likevel meir informasjon ved å sjå på den deriverte

$$f'(x) = 3x^2.$$

Den deriverte er 0 akkurat i origo. Kurva åt $f(x)$ er altso fyrst bratt stigande, flatar ut inn mot origo, men tek so til å stiga igjen, brattare og brattare. Plottet ser slik ut:



Øvingsoppgåve 6.16. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = x^3 + x.$$

Marker topp- og botnpunkta og skjæringspunkta med aksane.

Øvingsoppgåve 6.17. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = x^3 - 1.$$

Marker topp- og botnpunkta og skjæringspunkta med aksane.

6.3 Polynom på faktorisert form

Eksempeloppgåve 6.18. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = x^3 - x^2 - x - 2.$$

Det er mogleg å visa at funksjonsuttrykket kan faktoriserast, slik at

$$f(x) = (x^2 + x + 1)(x - 2)$$

Marker topp- og botnpunkta og skjæringspunkta med aksane.

Løysing 6.7. Me kan finna nullpunkta ved hjelp av den faktoriserte formen. Me har $f(x) = 0$ når

$$0 = x^2 + x + 1, \quad \text{eller} \tag{6.3}$$
$$0 = x - 2. \tag{6.4}$$

Når me set inn i formelen, finn me at den fyrste likninga ikkje har løysingar. Den andre har løysinga $x = 2$.

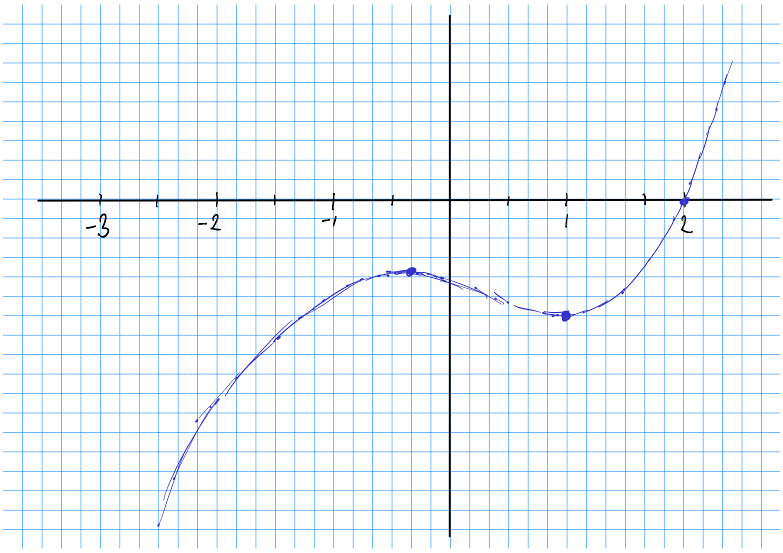
For å finna topp- og botnpunkt bruker me den deriverte. Det er enklast å derivera den ufaktoriserte formen.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1.$$

Nullpunkt finn me med formelen for andregradslikningar som

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{16}}{6} = \frac{1}{3} \pm \frac{2}{3} = \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{cases} \tag{6.5}$$

Me skisserer kurva med dei tre punkta som me har funne x-verdien for.



Merknad 6.3. Merk at me ikkje har rekna ut y-verdiar eller markert nøyaktige talverdiar i skissa i den siste løysinga. I mange av dei tidlegare løysingane har me teke det med, sjølv om oppgåva ikkje har spurt om det. Begge delar er greitt. So lenge figuren ikkje vert overlessa og uleseleg, og ein har med alt ein vert spurd om, so er resten ei smaksak.

Øvingsoppgåve 6.19. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2.$$

Det er mogleg å visa at dette kan faktoriserast som

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1)(x - 2)$$

Marker topp- og botnpunkta og skjæringspunkta med aksane.

6.4 Vidare lesing

Lesing: Bjørnestad *et al*, kapittel 3.3-3.4, 3.8, 3.12, 3.13

7 Den andrederiverte

Til øvingstimen 8 (21. oktober 2019)**.** Gjer oppgåvene i dette kapittelet, bortsett frå avsnitt **??**.

Til øvingstimen 9 (23. oktober 2019)**.** Fylgjande oppgåver:

1. Oppgåve 7.14
2. Prøv å koma à jour med tidlegare avsnitt.
3. Oppgåve 3 frå eksamen våren 2018.
4. Oppgåve 3-4 frå eksamen november 2015.

Når de arbeider med gamle eksamensoppgåver, ver merksam på at løysingsforslaga har endra seg over tid, og krava til fullstendige og ryddige forklaringar har auka over tid.

7.1 Den deriverte av høgare orden

Eksempeloppgåve 7.1. Me har funksjonen $f(x)$ med den deriverte:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 4, \tag{7.1}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 2. \tag{7.2}$$

Drøft og skissér $f'(x)$.

Løysing 7.1. Legg merke til at $f'(x)$ er ein funksjon. Drøfting av $f'(x)$ vert det same som drøfting av einkvan annan andregradsfunksjon. Dvs. at me kan derivera han, slik

$$f''(x) = 6x - 4. \tag{7.3}$$

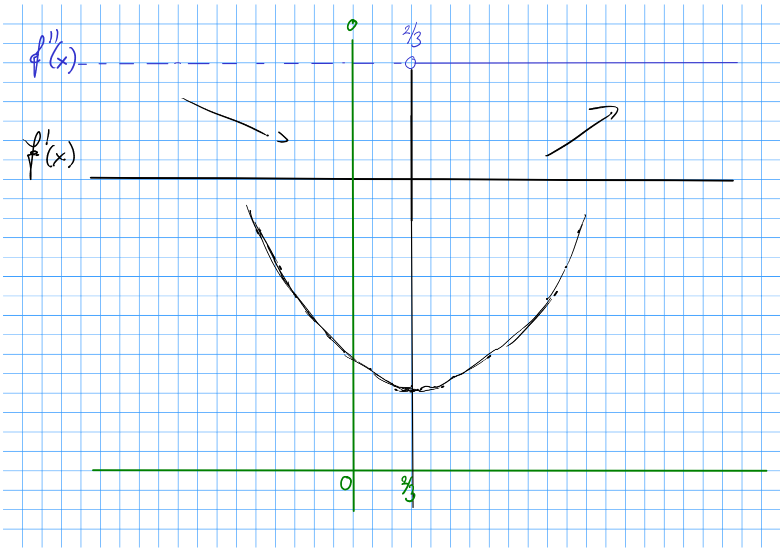
Me har $f''(x) = 0$ for $x = 2/3$, og $f''(x)$ byter forteikn. Difor har $f'(x)$ eit ekstremalpunkt for $x = 2/3$.

Nullpunkta åt $f'(x)$ finn me med formel, som fylgjer

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24}}{6} \tag{7.4}$$

Her er inga løysing, so $f'(x)$ har ingen nullpunkt.

Me kan teikna forteiknsdiagram for $f'(x)$ og $f''(x)$. Forteikna for $f''(x)$ viser at $f'(x)$ fyrst fell og so stig. Dette kan me bruka som utgangspunkt for å skissera $f'(x)$ som vanleg i koordinatsystemet.



Øvingsoppgåve 7.2. Me har funksjonen $f(x)$ med den deriverte:

$$f(x) = -x^3 + x^2 + 2, \tag{7.5}$$
$$f'(x) = -3x^2 + 2x. \tag{7.6}$$

Drøft og skissér $f'(x)$.

Merknad 7.1. Over har me funne den deriverte av den deriverte til ein funksjon $f(x)$. Funksjonen $f''(x)$ kallar me gjerne for den *andrederiverte*, eller den *dobbelderiverte*, av $f(x)$.

Eksempeloppgåve 7.3. Me har funksjonen $f(x)$ med den deriverte:

$$f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 1, \tag{7.7}$$
$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x. \tag{7.8}$$

Drøft og skissér $f'(x)$.

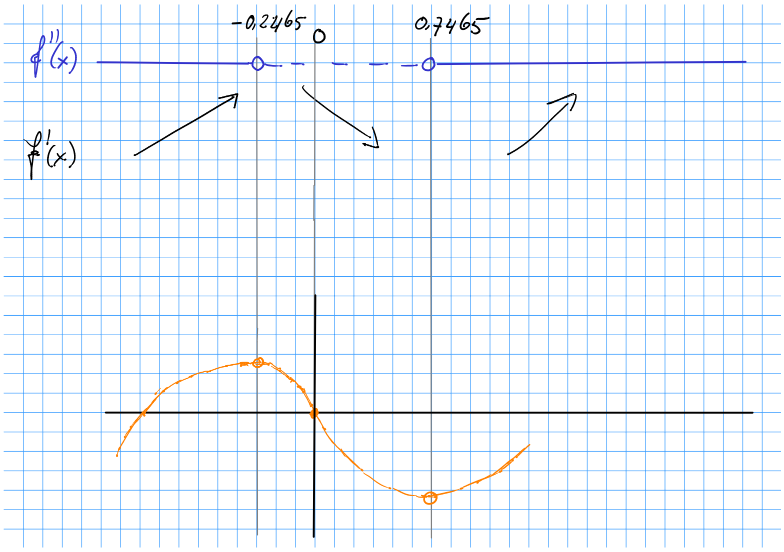
Løysing 7.2. Me drøftar $f'(x)$ som einkvan annan tredjegradsfunksjon. Derivasjon gjev

$$f''(x) = 12x^2 - 6x - 2. \tag{7.9}$$

Nullpunkt for $f''(x)$ er

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 12 \cdot (-2)}}{2 \cdot 12} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 96}}{24} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{132}}{24} = \begin{cases} 0{,}7287 \\ -0{,}2287 \end{cases} \tag{7.10}$$

Sidan andregradsleddet er positivt, har andregradsfunksjonen botnen ned. Då kan me teikna forteiknsdiagram, og skissera $f'(x)$ basert på det.



Me har markert nullpunkt i origo, sidan det er lett å sjå at alle ledda i $f'(x)$ er delelege med x. Dei andre nullpunkta har me ikkje rekna ut.

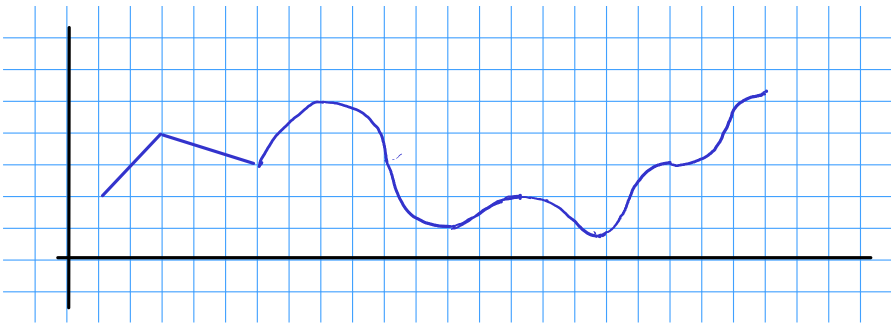
Øvingsoppgåve 7.4. Me har funksjonen $f(x)$ med den deriverte:

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2, \tag{7.11}$$
$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2x. \tag{7.12}$$

Drøft og skissér $f'(x)$.

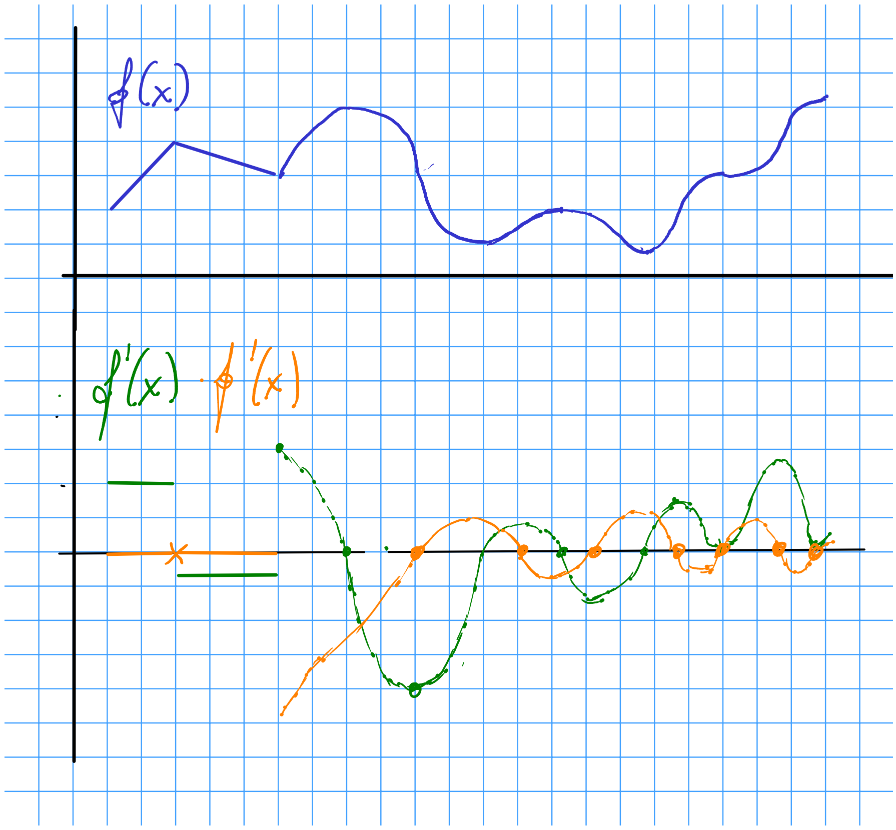
7.2 Krumming

Eksempeloppgåve 7.5. Ein funksjon $f(x)$ er gjeven som fylgjande kurve:



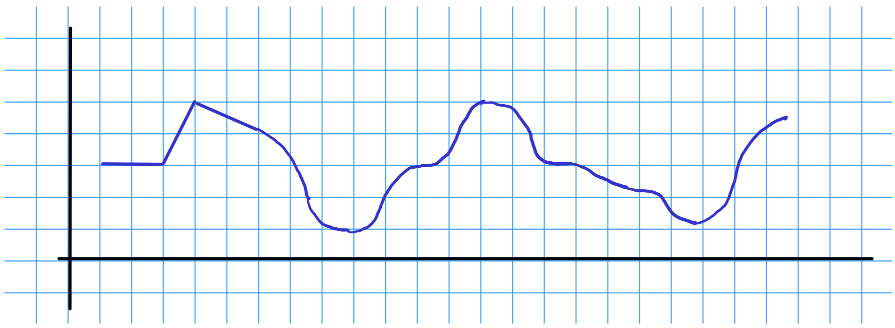
Skissér $f'(x)$ og $f''(x)$ basert på kurva over.

Løysing 7.3. Me skisserer $f'(x)$ basert på $f(x)$ slik at $f'(x)$ får positiv verdi når $f(x)$ fell og negativ når $f(x)$ stig. Me skisserer $f''(x)$ på same måte basert på $f(x)$.



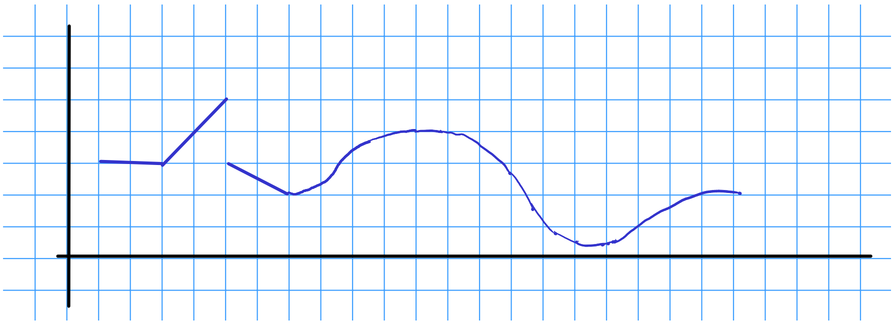
Merk at skissa ikkje er perfekt, men me kan sjå nokonlunde kvar $f'(x)$ og $f''(x)$ har null-, topp- og botnpunkt. Me kan òg sjå kvar dei er konstante. Legg merke til $\times$-ane, som viser punkt der $f''(x)$ er udefinert.

Øvingsoppgåve 7.6. Ein funksjon $f(x)$ er gjeven som fylgjande kurve:



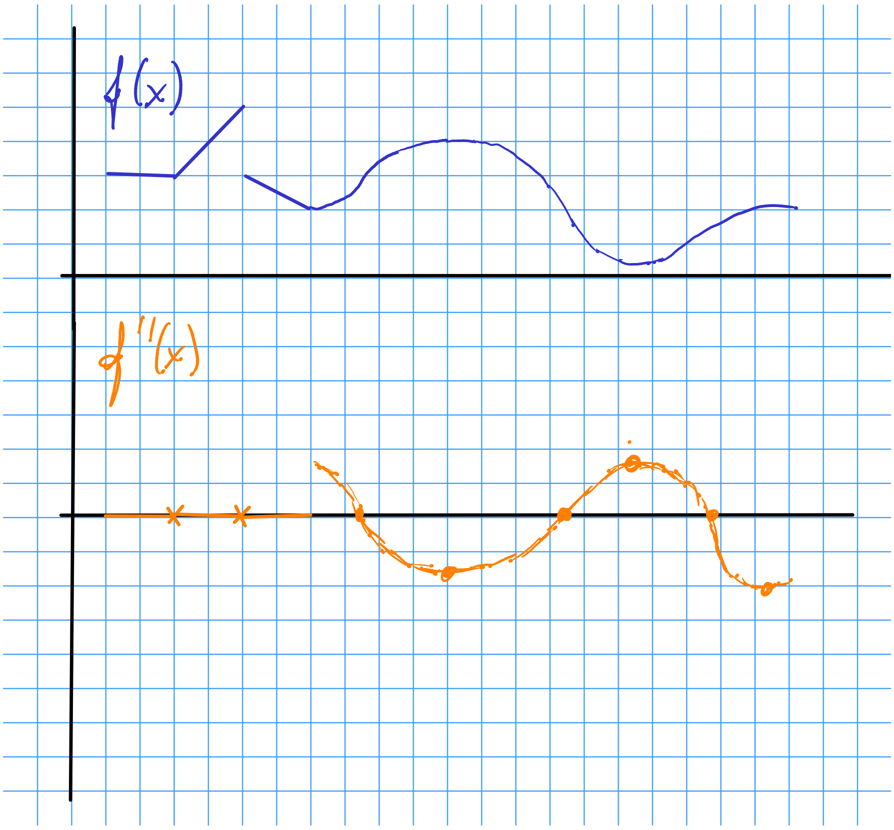
Skissér $f'(x)$ og $f''(x)$ basert på kurva over.

Eksempeloppgåve 7.7. Ein funksjon $f(x)$ er gjeven som fylgjande kurve:



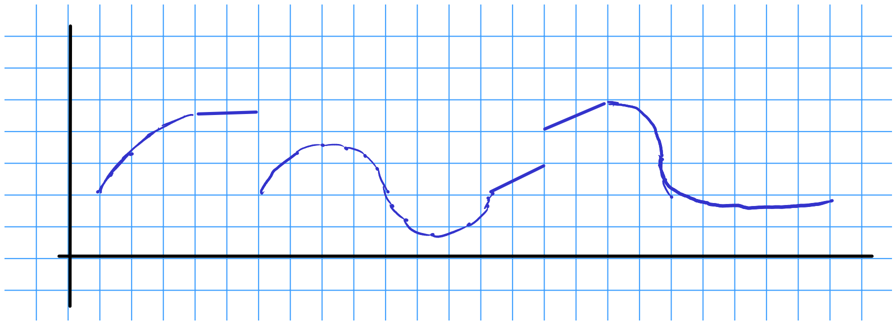
Skissér $f''(x)$ basert på kurva over.

Løysing 7.4. Me skisserer $f''(x)$ basert på $f(x)$ slik at $f''(x)$ er positiv når $f(x)$ krummar oppover og negativ når $f(x)$ krummar nedover.



Merk at skissa ikkje er perfekt, men me kan sjå nokonlunde kvar $f''(x)$ har null-, topp- og botnpunkt. Me kan òg sjå kvar dei er konstante. Legg merke til $\times$-ane, som viser punkt der $f''(x)$ er udefinert.

Øvingsoppgåve 7.8. Ein funksjon $f(x)$ er gjeven som fylgjande kurve:

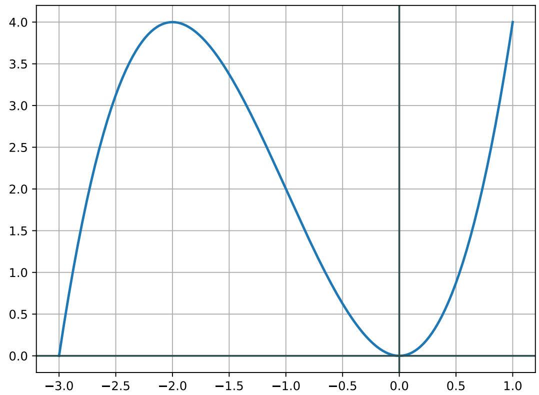


Skissér $f''(x)$ basert på kurva over.

7.3 Vendepunktet

Eksempeloppgåve 7.9. Sjå på funksjonen $f(x) = x^3 + 3x^2$. Denne funksjonen har eit lokalt maksimum for $x = -2$ og lokalt minimum for $x = 0$. Sjå på kurva på intervallet $-2 < x < 0$. Kvar er ho brattast?

Løysing 7.5. Lat oss plotta i full fart.



Kurva er openbert slak nær ekstremalpunkta. Det ser ut som om ho er brattast midt mellom topp- og botnpunktet, altso ved $x = -1$, men for å vera sikker på at svaret er nøyaktig er det best å bruka algebra.

Målet for bratte er stigningstalet åt tangenten, altso den deriverte:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x.$$

Me veit allereie frå oppgåva og plottet at $f'(-2) = f(0) = 0$ og at $f'(0) < 0$ for $-2 < x < 0$, men kvar er $f'(x)$ minst (mest negativ)?

For å finna minimumspunktet åt $f'(x)$, deriverer me igjen

$$f''(x) = 6x + 6.$$

Me ser at $f''(-1) = 0$. Dette er altso minimumspunktet åt $f'(x)$ og det brattaste punktet nedover på $f(x)$. Dette punktet vert òg kalla *vendepunktet* åt $f(x)$.

Merknad 7.2 (Vendepunkt)**.** I figuren ser me korleis kurva krummar med hulsida ned til venstre for vendepunktet og hulsida opp til høgre for vendepunktet. Den andrederiverte byter forteikn i vendepunktet. Han er negativ til venstre, der $f'(x)$ vert mindre og mindre og lagar hulside ned på $f(x)$. Han er positiv til høgre, der $f'(x)$ vert større og lagar hulside opp på $f(x)$.

Øvingsoppgåve 7.10. Sjå på funksjonen $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Denne funksjonen har eit lokalt maksimum for $x = 0$ og lokalt minimum for $x = 2$. Sjå på kurva på intervallet $0 < x < 2$. Kvar er ho brattast?

Eksempeloppgåve 7.11. Drøft og skisser funksjonen $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x$. Marker vendepunktet med x- og y-verdi.

Løysing 7.6. Me finn den deriverte

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 3.$$

Nullpunkta åt $f'(x)$ finn me med formelen for andregradslikningar

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = -2 \pm \frac{1}{6}\sqrt{108} = \begin{cases} -3{,}732 \\ -0{,}268 \end{cases} \tag{7.13}$$

Dette er ekstremalpunkta åt $f(x)$.

Me kan finna vendepunktet ved å setja den andrederivert lik null:

$$0 = f''(x) = 6x + 12.$$

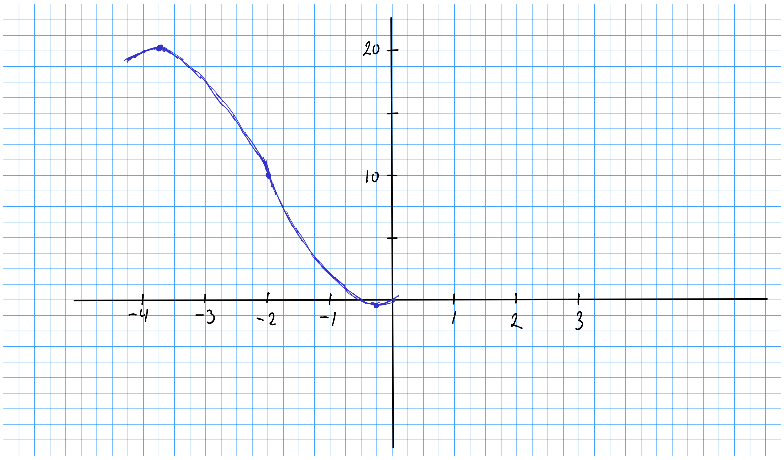
Me løyser likninga

$$0 = 6x + 12, \tag{7.14}$$
$$6x = -12, \tag{7.15}$$
$$x = -2. \tag{7.16}$$

Me kan finna funksjonsverdien i dei tre interessante punkta:

$$f(-3{,}732) = 20{,}39 \tag{7.17}$$
$$f(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot 2^2 + 1 = -8 - 12 + 1 = 10 \tag{7.18}$$
$$f(-0{,}268) = -0{,}392 \tag{7.19}$$

Då har me fylgjande plott.



Øvingsoppgåve 7.12. Drøft og skisser funksjonen $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x$. Marker vendepunktet med x- og y-verdi.

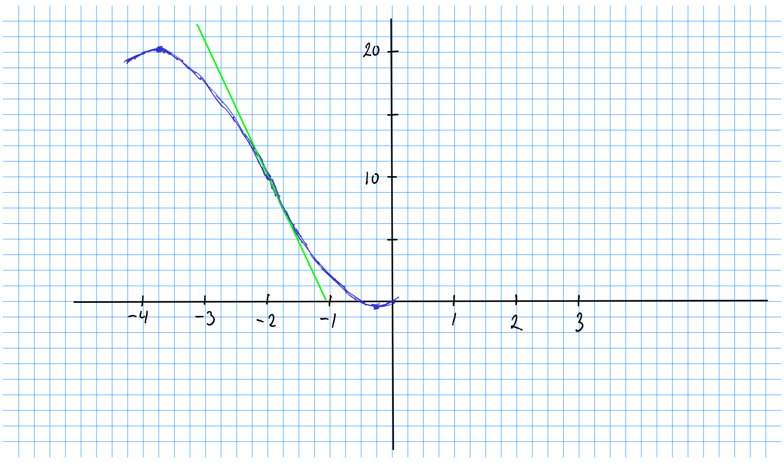
7.4 Vendetangenten

Eksempeloppgåve 7.13. Drøft og skisser funksjonen $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x$. Finn ei likning for vendetangenten og teikn vendetangenten i skissa.

Løysing 7.7. Me kan ta utgangspunkt i skissa frå oppgåve 7.11. Vendetangenten går gjennom vendepunktet $(-2, 10)$ og har stigningstalet

$$f'(-2) = 3(-2)^2 + 12(-2) + 3 = 12 - 24 + 3 = -9.$$

Dette kan me teikna som fylgjer.



Likninga for vendetangeten er $y = -9x + b$ for ein eller annan konstant b. Me kan bruka vendepunktet, med $x = -2$ og $y = 10$. Når me set inn ser me at $10 = -9 \cdot (-2) + b$ eller

$$10 = 18 + b.$$

Dette stemmer for $b = -8$. Dersom me forlengar tangenten i skissa, ser me at det stemmer godt. Likninga for vendetangenten er

$$y = -9x - 8.$$

Øvingsoppgåve 7.14. Drøft og skisser funksjonen $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x$. Finn ei likning for vendetangenten og teikn vendetangenten i skissa.

7.5 Vidare lesing

Lesing: Bjørnestad *et al*, kapittel 3.8 og 3.12

8 Kostnadsoptimum

Til øvingstimen 10 (28. oktober). Gjer oppgåvene i avsnitt 8.1–8.1.

Dersom du har tid, gjer oppg. 3.47 og 3.49 i læreboka.

Til øvingstimen 11 (30. oktober). Gjer oppgåvene i avsnitt 8.4, og (deretter) i avsnitt 3.5 om du ikkje har gjort dei før.

Dersom du har tid, gjer oppg. 3.48 og 3.50 i læreboka.

Merknad 8.1 (Kostnadsoptimum). Dersom me har ein kostnadsfunksjon $K(x)$, kan me definera einingskostnaden, eller gjennomsnittskostnaden, som

$$A(x) = \frac{K(x)}{x}.$$

Kostnadsoptimum er minimumspunktet for einingskostnaden.

8.1 Utan faste kostnader

Eksempeloppgåve 8.1. Ei bedrift har kostnadsfunksjonen

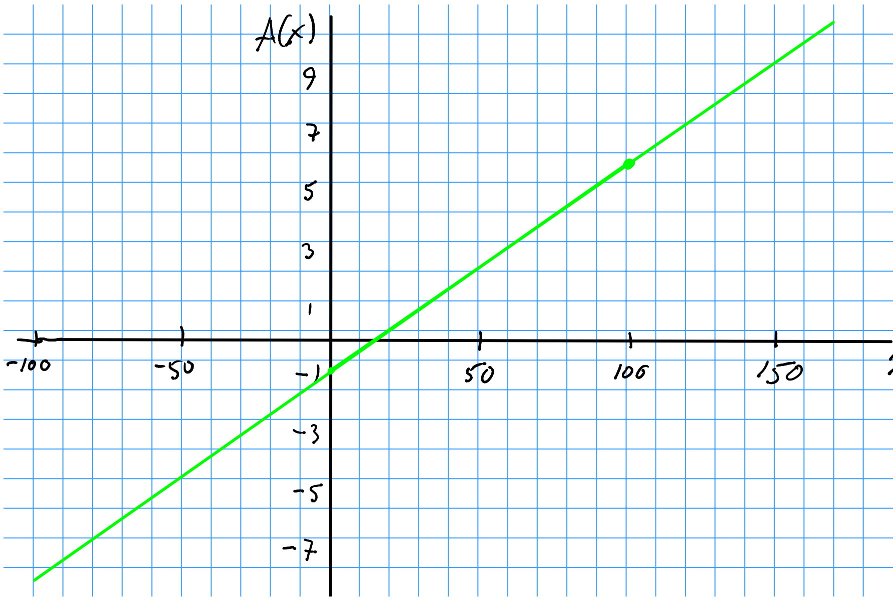
$$K(x) = 0{,}07x^2 - x.$$

Finn gjennomsnittskostnaden $A(x)$. Drøft og skisser $A(x)$ og finn kostnadsoptimumet.

Løysing 8.1. Gjennomsnittskostnaden er gjeven som

$$A(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}07x - 1.$$

Dette er ein lineær funksjon, og skissa vert ei rett line.



Funksjonen $A(x)$ er monotont stigande, so den lågaste gjennomsnittskostnaden får me når x er minste moglege (meiningsfulle) verdi. Merk at $A(x) = K(x)/x$ ikkje er definert for $x = 0$ sidan me ikkje kan dela på 0. Me kan ta ein verdi vilkårleg nær 0, og få ein gjennomsnittskostnad vilkårleg nær -1, men negativ kostnad gjev heller ikkje særleg meining. Ein får gå ut frå at $K(x)$ ikkje var meint for små verdiar av x.

Kostnadsoptimum gjev ikkje særleg meining i denne oppgåva.

Øvingsoppgåve 8.2. Ei bedrift har kostnadsfunksjonen

$$K(x) = 0{,}05x^2 + 2x.$$

Finn gjennomsnittskostnaden $A(x)$. Drøft og skisser $A(x)$. Kva kan me seia om kostnadsoptimumet?

8.2 Den lineære kostnadsfunksjonen

Eksempeloppgåve 8.3. Ei bedrift har kostnadsfunksjonen

$$K(x) = 10x + 50.$$

Finn gjennomsnittskostnaden $A(x)$. Drøft og skisser $A(x)$ og finn kostnadsoptimumet.

Løysing 8.2. Gjennomsnittskostnaden er gjeven som

$$A(x) = \frac{K(x)}{x} = 10 + \frac{50}{x}.$$

Lat oss fyrst analysera dei variable og dei faste kostnadene kvar for seg. Me skriv

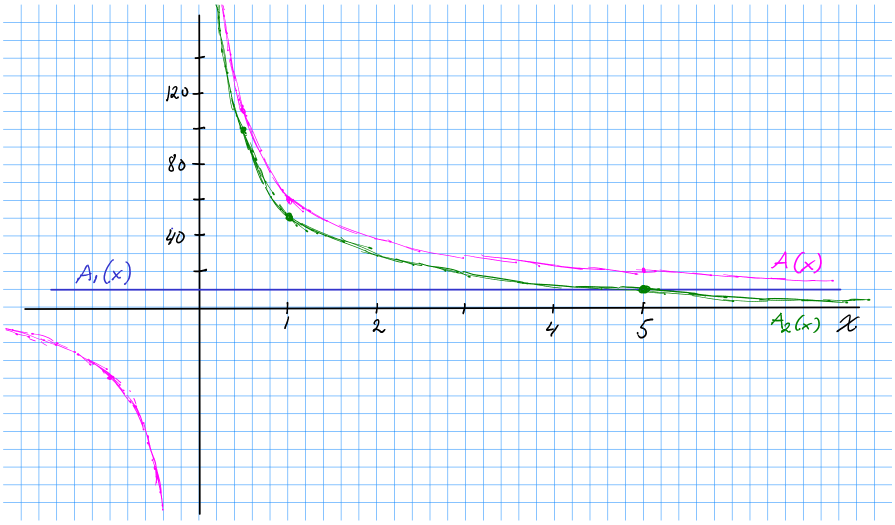
$$A_1(x) = 10, \tag{8.1}$$

$$A_2(x) = \frac{50}{x}, \tag{8.2}$$

$$A(x) = A_1(x) + A_2(x). \tag{8.3}$$

Legg merke til at $A_2(x)$ er udefinert for $x = 0$, men kva skjer når $x \to 0^+$, dvs. når x er positiv og nærmar seg 0. Når me deler på eit stadig mindre tal, vert brøken stadig større, so $A_2(x) \to \infty$. Omvendt kan me sjå, når $x \to \infty$, at $A_2(x) \to 0^+$.

Me ser òg at $A_1(x)$ er konstant, dvs. ei vassrett line, og me kan skissera $A_1(x)$ og $A_2(x)$ i diagrammet.



I skissa ser me korleis kurva åt $A_2(x)$ nærmar seg x-aksen når $x \to \infty$, og y-aksen når $A_2(x) \to \infty$. Me har òg skissert $A(x)$. Sidan $A(x)$ er summen av $A_2(x)$ og $A_1(x) = 10$, vert kurva lik $A_2(x)$ flytta ti steg opp langs y-aksen.

Me har skissert funksjonen for negative verdiar av x for å illustrera korleis slike funksjonar ser ut generelt. Sidan negativt produksjonsvolum ikkje gjev meining, er dette ikkje relevant for kostnadsfunksjonar.

Kostnadsoptimumet er ikkje definert her. Den lågaste einingskostnaden får me når $x \to \infty$.

Øvingsoppgåve 8.4. Ei bedrift har kostnadsfunksjonen

$$K(x) = 2x + 100.$$

Finn gjennomsnittskostnaden $A(x)$. Kva kan me seia om kostnadsoptimumet?

Rekneregel 8.1 Den deriverte av $1/x$.

$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{8.4}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \tag{8.5}$$

8.3 Kostnadsoptimum

Eksempeloppgåve 8.5. Ei bedrift har kostnadsfunksjonen

$$K(x) = 0{,}07x^2 - x + 50.$$

Finn gjennomsnittskostnaden $A(x)$. Drøft og skisser $A(x)$ og finn kostnadsoptimumet.

Løysing 8.3. Gjennomsnittskostnaden er gjeven som

$$A(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}07x - 1 + \frac{50}{x}$$

Lat oss fyrst analysera dei variable og dei faste kostnadene kvar for seg, slik som me gjorde i oppgåve 8.1. Me skriv

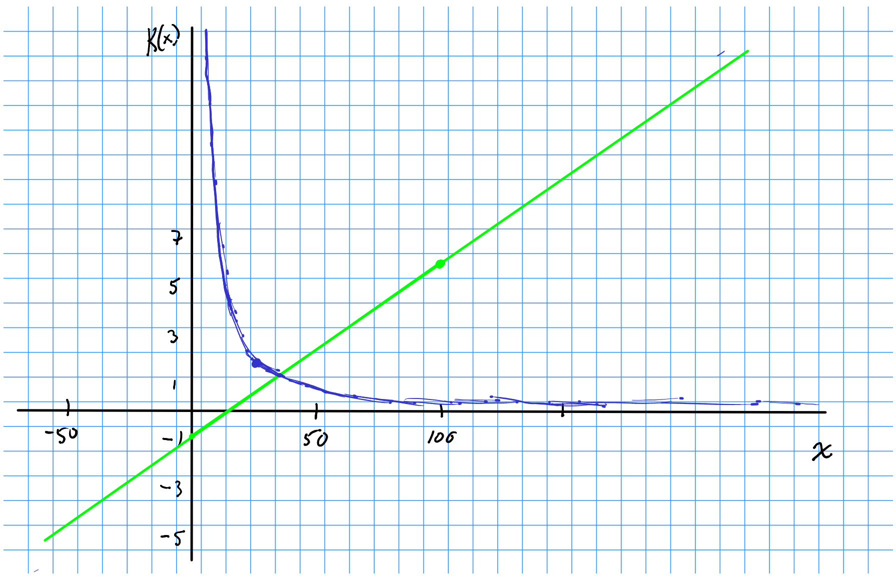
$$A_1(x) = 0{,}07x - 1, \tag{8.6}$$

$$A_2(x) = \frac{50}{x}, \tag{8.7}$$

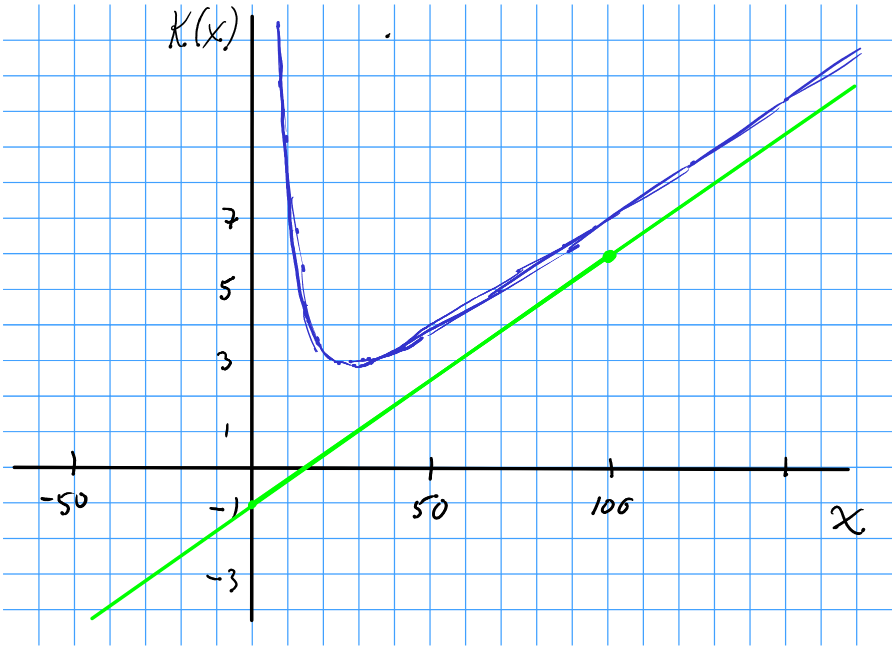
$$A(x) = A_1(x) + A_2(x). \tag{8.8}$$

Gjennomsnittet av dei faste kostnadene, $A_2(x)$, er den same funksjonen som i oppgåve 8.1. Han er udefinert for $x = 0$, og $A_2(x) \to \infty$ når $x \to 0^+$. Når $x \to \infty$, får me $A_2(x) \to 0^+$.

Gjennomsnittet $A_1(x)$ av dei variable kostnadene er denne gongen lineært, men ikkje konstant. Me kan skissera $A_1(x)$ og $A_2(x)$ som fylgjer.



Dersom me legg saman $A_1(x)$ og $A_2(x)$ skulle me få u nokonlunde fylgjande plott.



Det ser ut som om me har eit botnpunkt, so lat oss studera det litt nærare ved hjelp av den deriverte. Då treng med rekneregel 8.1. Me kan derivera ledd for ledd, so me har

$$A(x) = 0{,}07x - 1 + 50 \cdot \frac{1}{x} \tag{8.9}$$

$$A'(x) = 0{,}07 + 50 \cdot \big(-\frac{1}{x^2}\big) = 0{,}07 - \frac{50}{x^2} \tag{8.10}$$

Me må løysa likninga

$$0 = 0{,}07 - \frac{50}{x^2}. \tag{8.11}$$

Dette er ikkje ei vanleg andregradslikning, men me kan gonga gjennom med x^2 (føresett at $x \neq 0$):

$$0 \cdot x^2 = 0{,}07 \cdot x^2 - 50, \tag{8.12}$$

$$50 = 0{,}07 \cdot x^2 \tag{8.13}$$

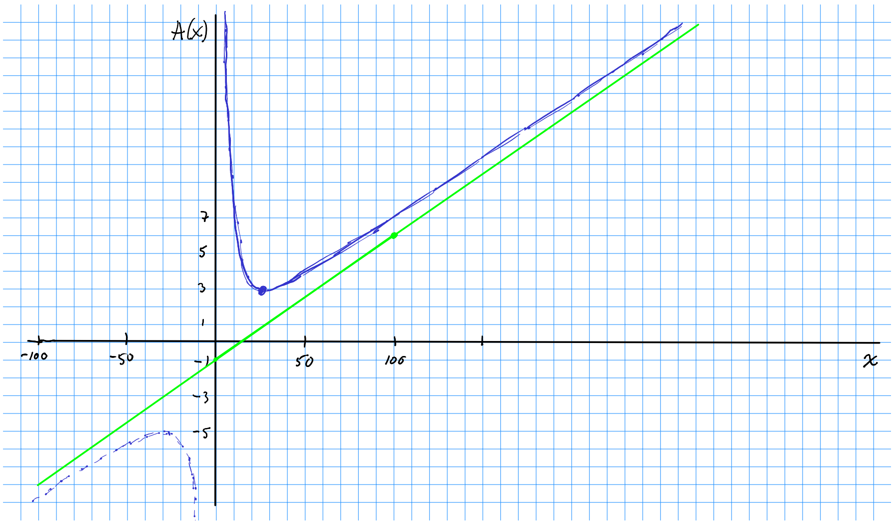
$$\frac{50}{0{,}07} = x^2 \tag{8.14}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{50}{0{,}07}} \approx \pm 26{,}73 \tag{8.15}$$

Den tilhøyrande y-verdien er

$$A(26{,}73) = 2{,}74 \tag{8.16}$$

Ved hjelp av dette punktet, kan me skissera funksjonen litt meir nøyaktig.



Den lågaste gjennomsnittskostnaden finn me når me produserer $x = 26{,}73$ einingar.

Øvingsoppgåve 8.6. Ei bedrift har kostnadsfunksjonen

$$K(x) = 0{,}05x^2 + 2x + 100.$$

Finn gjennomsnittskostnaden $A(x)$. Drøft og skisser $A(x)$ og finn kostnadsoptimumet.

Merknad 8.2 (Rasjonal funksjon)**.** Funksjonar på formen

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

der både $p(x)$ og $q(x)$ er polynom, vert kalla *rasjonale funksjonar*. Når kostnadsfunksjonen $K(x)$ er eit polynom, vert gjennomsnittskostnaden $A(x) = K(x)/x$ ein rasjonal funksjon, sidan x er eit polynom.

Øvingsoppgåve 8.7. Drøft og skisser funksjonen

$$A(x) = -x + 2 + \frac{1}{x}.$$

Finn maksimums- og minimumspunkta, og forklar kva som skjer når $x \to 0$ og når $x \to \pm\infty$.

Øvingsoppgåve 8.8. Drøft og skisser funksjonen

$$A(x) = -x + 2 - \frac{1}{x}.$$

Finn maksimums- og minimumspunkta, og forklar kva som skjer når $x \to 0$ og når $x \to \pm\infty$.

8.4 Grensekostnaden i optimum

Eksempeloppgåve 8.9. Ei bedrift har kostnadsfunksjonen

$$K(x) = 0{,}1x^2 + x + 20.$$

Finn kostnadsoptimum. Rekn ut gjennomsnittskostnaden og grensekostnaden i kostnadsoptimum.

Løysing 8.4. Me må starta med gjennomsnittskostnadsfunksjonen

$$A(x) = 0{,}1x + 1 + \frac{20}{x}.$$

Optimum finn me ved å derivera:

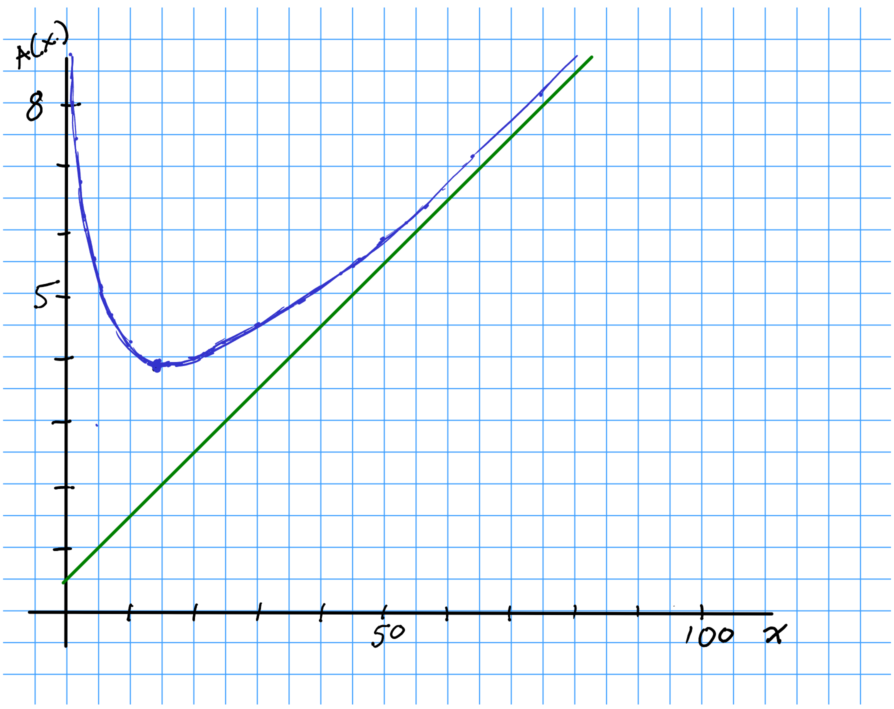
$$A'(x) = 0{,}1 - \frac{20}{x^2}.$$

Når me løyser likninga $A'(x) = 0$, får me

$$x^2 = 200.$$

Kostnadsoptimumet er altso $x = 10\sqrt{2} \approx 14{,}1$, og $A(14{,}1) \approx 3{,}8$.

Me skisserer funksjonen for å dobbelsjekke at kostnadsoptimumet faktisk er et minimum.



Me treng òg grensekostnaden

$$K'(x) = 0{,}2x + 1.$$

Verdiane i kostnadsoptimum er

$$K'(14{,}1) = 3{,}8 \tag{8.17}$$
$$A(14{,}1) = 3{,}8 \tag{8.18}$$

Øvingsoppgåve 8.10. Ei bedrift har kostnadsfunksjonen

$$K(x) = 0{,}08x^2 - 2x + 100.$$

Finn kostnadsoptimum. Rekn ut gjennomsnittskostnaden og grensekostnaden i kostnadsoptimum.

Merknad 8.3. I desse oppgåvene var grense- og gjennomsnittskostnadene like i kostnadsoptimum. Når me ser slike «samantreff» lønar det seg å spørsja om det alltid er slik, og evt. kvifor det er slik.

Der finst eit algebraisk argument, men det konseptuelle argumentet er mest interessant.

Lat oss tenkja oss at prisen akkurat dekkjer gjennomsnittskostnaden i optimum og at prisen er konstant. Då går bedrifta akkurat i balanse. Dersom bedrifta endrar produksjonsvolumet frå optimum, so vil gjennomsnittskostnaden auka og bedrifta gå med underskot. Det vil seia at bedrifta ikkje berre står i kostnadsoptimum, men òg i profittoptimum.

I profittoptimum, må grensekostnaden vera lik prisen. Dersom grensekostnaden var høgare enn prisen, ville ein tena meir ved å redusera produksjone, og dersom grensekostnaden var lågare, vore der gevinst i auka produksjon. Difor er grensekostnaden lik prisen, som var lik gjennomsnittskostnaden.

Merknad 8.4. Nokon studentar og nokon bøker bruker regelen $A(x) = K'(x)$ for å finna kostnadsoptimum. Det funkar, men ein treng ikkje hugsa denne regelen. Den generelle metoden for å finna optimum ved hjelp av derivasjon ($A'(x) = 0$) fungerer for alle funksjonar, ogso $A(x)$.

Øvingsoppgåve 8.11. Ei bedrift har kostnadsfunksjonen

$$K(x) = -0{,}01x^2 + 100x + 5.$$

Skisser funksjonen $A(x)$ for gjennomsnittskostnaden og finn kostnadsoptimum. Samanlikn med forrige oppgåve og drøft kor mykje bedrifta bør produsera.

8.5 Vidare lesing

Lesing: Bjørnestad *et al*, kapittel 3.14–3.15

9 Eksamenstips

Dette kapittelet viser typiske eksamensoppgåver frå eksamen tidlegare år frå dei tre hovudtemaa i pensum. Kvart hovudtema skal dekkja minst 25% av eksamen, og 75–80% av eksamen skal vera ganske forutseieleg. Dei siste 20–25% eksamen skal by på overrasking. Fullstendig og god kontroll på dei forutseielege 75% er nok til karakteren C.

Oppgåvene er henta frå eksamen hausten 2017, men nokre av løysingsforslaga er utvida med meir detaljar og instruksjonar til sensor, i tråd me korleis eksamen er planlagd i år. Der er òg nokre mindre språklege endringa i oppgåvetekstane.

Desse oppgåvene er typiske, men der er variasjon. Alle døma og oppgåvene i oppgåvehefta er relevante for dei tre hovudtemaa.

9.1 Generell instruksjon

1. Enkel kalkulator er einaste tillatne hjelpemiddel.
2. Svar på oppgåvene med tanke på å forklara medstudentane korleis du tenkjer og overtyda dei om at løysinga er rett.
3. Det er ikkje eit mål å velja same løysingsmetode som eksaminator. Der er som regel mange vegar til målet.

9.2 Tema 1: Finansmatematikk

Eksempeloppgåve 9.1. Du set 1000 kr. på konto til 2% rente.

1. Kva er saldoen etter seks år?
2. Kor mange år tek det før saldoen er 2000 kr.?

Vis korleis du kjem fram til svara.

Løysing 9.1. *Del 1.* Saldoen etter seks år er $1000 \cdot 1{,}02^6 \approx 1126{,}16$ kroner.

Del 2. Saldoen etter t år er

$$1000 \cdot 1{,}02^t = 2000$$

Dette er ei likning som me kan forenkla til

$$1{,}02^t = 2,$$

som gjev

$$t \ln 1{,}02 = \ln 2,$$

Ergo

$$t = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}02} \approx 35{,}00$$

Det tek altso 35 år å dobla saldoen.

Eksempeloppgåve 9.2. Per og Kari fekk ein genial idé då dei skreiv sisteårsoppgåve på studiet, og no vil dei starta bedrift. Dei trur at idéen deira kan gje ein profitt på éin million kronar ved utgangen av kvart år i fem år, før andre aktørar kjem etter og profitten forsvinn pga. konkurransen. Diskonteringsraten (rentenivået) er fem prosent.

1. Kva er noverdien til profitten?

2. Sett i staden at dei reknar med å vidareutvikla idéen og oppnå ein profitt på ein million per år til evig tid. Kva er noverdien til den evige profittstraumen?

3. Det kostar dei fem millionar å starta bedrifta. Kor mange år tek det før dei har tent inn oppstartkostnaden?

Vis korleis du kjem fram til svara.

Løysing 9.2. *Del 1.* Noverdien (i millionar) er

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{1{,}05^i} &= \frac{1}{1{,}05} \sum_{i=0}^{4} \frac{1}{1{,}05^i} \\
&= \frac{1}{1{,}05} \frac{\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^5 - 1}{\frac{1}{1{,}05} - 1} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^5 - 1}{-0{,}05} \\
&\approx 4{,}329
\end{aligned} \tag{9.1}$$

Del 2. Noverdien (i millionar) er

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1{,}05^i} &= \frac{1}{1{,}05} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1{,}05^i} \\
&= \frac{1}{1{,}05} \frac{-1}{\frac{1}{1{,}05} - 1} \\
&= \frac{1}{0{,}05} \\
&= 20.
\end{aligned} \tag{9.2}$$

Del 3. Set at det tek t år før noverdien når fem (millionar). Me skal finna talet t. Noverdien etter t år (i millionar) kan skrivast som

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{1{,}05^i} &= \frac{1}{1{,}05} \sum_{i=0}^{t-1} \frac{1}{1{,}05^i} \\ &= \frac{1}{1{,}05} \frac{\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^t - 1}{\frac{1}{1{,}05} - 1} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^t - 1}{-0{,}05}\end{aligned} \tag{9.3}$$

Me skal då løysa likninga

$$5 = \frac{\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^t - 1}{-0{,}05} \tag{9.4}$$

eller

$$-0{,}25 = \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^t - 1 \tag{9.5}$$

eller

$$0{,}75 = \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^t \tag{9.6}$$

Dette gjev

$$\ln 0{,}75 = t \ln \left(\frac{1}{1{,}05}\right) \tag{9.7}$$

eller

$$t = \frac{\ln 0{,}75}{\ln \left(\frac{1}{1{,}05}\right)} \approx 5{,}9 \tag{9.8}$$

Det tek altso 5,9 år å tena inn oppstartskostnaden.

Merknad 9.1 (Del 3)**.** Oppgåva har to hovudsteg. Det eine er å setja opp likninga og det andre er å løysa ho. Det er rimeleg å gje halv uttelling for likninga og halv uttelling for løysinga.

Merknad 9.2. Det vesentlege i denne oppgåva er at studentane veit å tolka oppgåva og har ein løysingsmetode som verkar og som dei er trygg på. Ein skal ikkje leggja vekt på at dei vel den beste metoden. Del 1 kan løysast ved å tabulera heile kontantstraumen, og det er heilt greitt. Del 3 kan i alle fall løysast omtrentleg med tabell. Full uttelling føreset eksakt løysing, men ei omtrentleg løysing (litt mindre enn seks år) med god grunngjeving må gje minimum halv uttelling.

Del 2 er verre å tabulera, men ein skal ikkje avvisa gode forsøk som gjev vel underbygd innsikt i problemet.

9.3 Tema 2: Kostnads- og inntektsfunksjonar

Oppgåvene nedanfor er henta frå tidlegare eksamensoppgåver, men løysingsforslaga er skrivne om som sensorrettleiingar slik dei vil verta brukt framover.

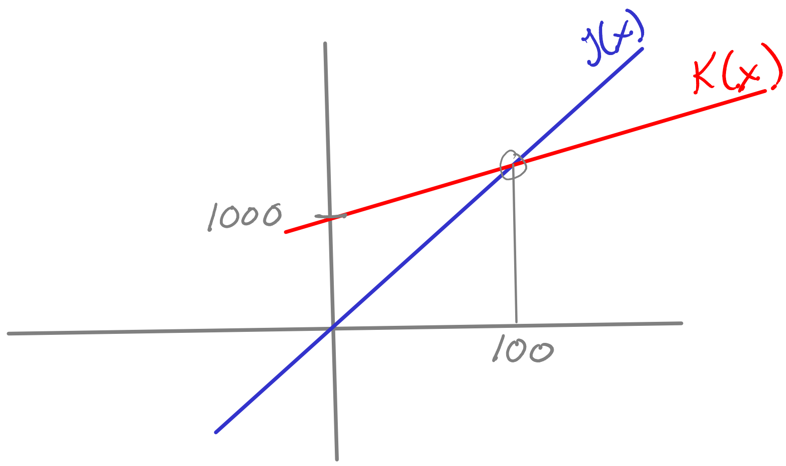
Eksempeloppgåve 9.3 (Eksamen hausten 2017, oppg. 5)**.** Ålesund Dings og Profitt AS sel dingsar. Utgiftene deira er 10 kr. per produsert dings, pluss 1000 kr. dagen i faste utgifter (uavhengig av produksjonsvolumet).

1. Finn eit uttrykk for kostnadsfunksjonen $K(x)$.
2. Kvar dings vert solgt for 20kr. Finn eit uttrykk for inntektsfunksjonen $I(x)$.
3. Skissér både funksjonane $I(x)$ og $K(x)$ i same koordinatsystem. Hugs å merka kva kurve som svarer til kva funksjon i teikninga.
4. Finn eit uttrykk for profittfunksjonen $P(x)$.
5. Finn produksjonsvolumet x som gjev balanse i drifta (korkje overskot ellet underskot). Vis utrekninga og markér løysinga i skissa frå forrige deloppgåve.

Løysing 9.3. *Del 1.* Me legg saman dei totale variable kostnadane for x dingsar med dei faste kostnadene og får kostnadsfunksjonen $K(x) = 10x + 1000$

Del 2. 20 kr. per eining vert $I(x) = 20x$ kroner for x einingar.

Del 3. Dette gjev fylgjande skisse:



Del 4. Profitten er overskotet når me trekk utgiftene frå inntektene, altso $P(x) = I(x) - K(x) = 10x - 1000$

Del 5. Balanse i drifta vil seia at $P(x) = 0$, eller mao.

$$10x - 1000 = 0$$

Dette gjev

$$10x = 1000$$

eller

$$x = \frac{1000}{10} = 100$$

Bedrifta går i balanse når dei produserer 100 einingar.

Merknad 9.3. Heilskapsforståing er vesentleg i kurset og i denne oppgåva skal ein leggja vekt på at figuren er konsistent med dei øvrige svara. Spesielt er ikkje svaret på del 5 fullstendig utan at likevektspunktet er markert i figuren for del 3. Av same grunn skal ein trekkja mykje for simple reknefeil (slurvefeil) som burde ha vore oppdaga ved hjelp av skissa og som korkje er retta eller kommentert. (I andre tilfelle kan slike slurvefeil dømmast lett.)

Eksempeloppgåve 9.4 (Eksamen hausten 2017, oppg. 6)**.** Ei anna bedrift har kostnadsfunksjonen

$$K(x) = x^2 + 10x + 30.$$

1. Finn eit uttrykk for grensekostnaden $K'(x)$?
2. Finn eit uttrykk for gjennomsnittskostnaden $A(x)$ når bedrifta produserer x dingsar?

Sjå no på tilfellet der bedrifta leverer $x = 10$ dingsar.

3. Finn gjennomsnittskostnaden for $x = 10$
4. Finn grensekostnaden for $x = 10$
5. Kva må utsalsprisen vera for at bedriften skal gå med overskot?
6. Kva må utsalsprisen vera for at det skal løna seg å auka produksjonen?

Løysing 9.4. *Del 1.* Grensekostnaden er det same som den deriverte av kostnadsfunksjonen, altso $K'(x) = 2x + 10$.

Del 2. Gjennomsnittskostnaden per eining er totalkostnad delt på talet på einingar:

$$A(x) = x + 10 + \frac{30}{x}$$

Del 3. Me set inn i funksjonen og får at gjennomsnittskostnaden er

$$A(10) = 10 + 10 + \frac{30}{10} = 23$$

Del 4. Me set inn i funksjonen og får at grensekostnaden er

$$K'(10) = 2 \cdot 10 + 10 = 30$$

Del 5. Han må meir enn dekkja gjennomsnittskostnaden. Prisen må altso vera meir enn 23 (kroner).

Del 6. Han må dekkja grensekostnaden. Prisen må altso vera meir enn 30 (kroner).

Merknad 9.4. I del 6 kan ein diskutera om 30 eksakt er tilstrekkeleg eller ikkje, men det er ikkje verd å gjera det her. Svaret må reknast som like rett uansett om ein skriv meir enn

Merknad 9.5. Svara i denne oppgåva må vurderast samla, slik at fylgjefeil ikkje vert straffa. Dei siste to spørsmåla legg vekt på at studenten klarer å tolka matematiske resultat tilbake i det praktiske problemet, og denne evna er i stor grad uavhengig av evna til å rekna rett i spørsmåla over.

9.4 Tema 3: Funksjonsdrøfting

Oppgåvene nedanfor er henta frå tidlegare eksamensoppgåver, men løysingsforslaga er skrivne om som sensorrettleiingar slik dei vil verta brukt framover.

Eksempeloppgåve 9.5 (Eksamen hausten 2017, oppg. 3). Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x.$$

Svar på fylgjande spørsmål, og markér svaret både i skissa og i teksta.

1. Finn ekstremalpunkta (maksimum og minimum) åt funksjonen. Bestem x- og y-verdiane til ekstremalpunkta.
2. Finn nullpunkta åt funksjonen.
3. For kva x-verdiar er funksjonen stigande?
4. For kva x-verdiar er funksjonen positiv? Dvs. $f(x) > 0$.
5. Finn vendepunktet til $f(x)$. Vis både x- og y-verdien.
6. Kva skjer med funksjonsverdien $f(x)$ når $x \to \infty$?

Merknad 9.6. Det vesentlege i denne oppgåva er å sy saman alle delsvara til ein heilskap, slik at skissa vert konsistent. Studentane skal visa heilskapsforståing. Ein god tommelfingerregel er å leggja lik vekt på den algebraiske løysinga og på skissa.

Merknad 9.7. Det er smak og behag kva rekkjefylgje ein løyser deloppgåvene i. Her startar me med ekstremalpunkta.

Løysing 9.5. *Del 1.* Lat oss derivera

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x \tag{9.9}$$
$$f'(x) = -3x^2 + 4x - 1 \tag{9.10}$$

I eventuelle ekstremalpunkt har me $f'(x) = 0$, altso

$$0 = -3x^2 + 4x - 1, \tag{9.11}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{-6}, \tag{9.12}$$

$$x = \begin{cases} 1, \\ \frac{1}{3}. \end{cases} \tag{9.13}$$

Med to ekstremalpunkt i ein tredjegradsfunksjon, må det eine vera toppunkt og det andre botnpunkt. Me finn y-verdiane ved innsetjing

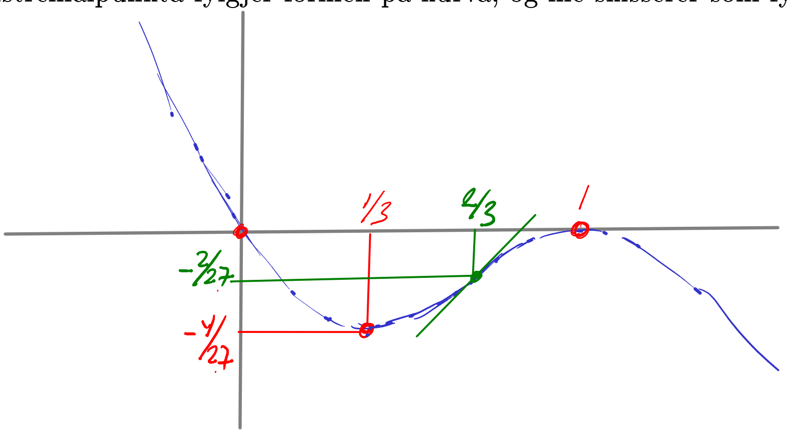
$$\begin{aligned} f(\frac{1}{3}) &= -\frac{1}{3^3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{27} + \frac{2}{9} - \frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{27} + \frac{6}{27} - \frac{9}{27} \\ &= \frac{-1+6-9}{27} = -\frac{4}{27} \end{aligned} \tag{9.14}$$

$$f(1) = -1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 = 0 \tag{9.15}$$

Del 2. For å få skissa presis kan me godt finna nullpunkta med ein gong. Då faktoriserer me funksjonen som fylgjer:

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x = x(-x^2 + 2x - 1) \tag{9.16}$$

Her får me altso nullpunkt for $x = 0$ og for $-x^2 + 2x - 1 = 0$. Den siste likninga kan med løysa med formel, og då finn me eitt nullpunkt, for $x = 1$. Me har altso to nullpunkt $x = 0$ og $x = 1$. Det siste fell saman med eit ekstremalpunkt. Når me teiknar null- og ekstremalpunkta fylgjer formen på kurva, og me skisserer som fylgjer:



Vendepunktet er rekna ut under.

Del 3. Me ser av skissa at funksjonen er stigande når $1/3 < x < 1$. Sidan me veit at ein tredjegradsfunksjon berre har eitt topp- og eitt botnpunkt, må dette vera det einaste området der funksjonen er stigande.

Del 4. Me ser av skissa at funksjonen er positiv for $x < 0$. Sidan me kjenner formen på tredjegradsfunksjonen, med eitt topp- og botnpunkt, veit me at han er positiv i heile området til venstre for 0.

Del 5. Vendepunktet er bestemt av $f''(x) = 0$. Dette gjev

$$f''(x) = -6x + 4 = 0$$

eller $x = 2/3$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3}\right) &= -\frac{2^3}{3^3} + 2 \cdot \frac{2^2}{3^2} - \frac{2}{3} \\ &= -\frac{8}{27} + \frac{8}{9} - \frac{2}{3} \\ &= -\frac{8}{27} + \frac{24}{27} - \frac{18}{27} \\ &= \frac{-8 + 24 - 18}{27} = -\frac{-2}{27} \end{aligned} \tag{9.17}$$

Dette markerer me i skissa.

Del 6. For store verdiar av x er tredjegradsleddet dominerande, pga. forteiknet vert dette negativt. Dermed har med $f(x) \to -\infty$ når $x \to \infty$, og skissa stadfestar det.

Merknad 9.8. Skissa som er kravd i oppgåva legg godt til rette for å dobbelsjekka alle svar. Ein skal ikkje krevja at studentane viser at dei dobbeltsjekkar svara sine, men dei bør gjera det. Fordi oppgåva legg so godt til rette for å dobbelsjekka svara, skal ein straffa slurvefeil strengt i denne oppgåva, med mindre inkonsistensen er kommentert.

Merknad 9.9. Dersom me er i tvil, kan me stadfesta løysingane ved å forteiknsdrøfta. I del 3 vil ein i so fall forteiknsdrøfta $f'(x)$, og i del 4 $f(x)$.

Merknad 9.10. I del 3, 4 og 6 kan ein bruka skissa som argument, men for å få full uttelling skal ein ha eit argument for at der ikkje kan skje noko uventa utanfor skissa. Dette kan ein gjera ved å visa til den velkjente formen som tredjegradskurva har, utan å verta særleg formell. (Jfr. løysingsforslaget for Del 3–4.)

Litteratur

Philip A. Neher. *Natural resource economics. Conservation and exploitation.* 1990.

Register