Matematikk frå Røynda
Finans og geometriske rekkjer

Hans Georg Schaathun

20. september 2019

Innhald

1 Forord

Matematikk er vanskeleg for mange. Ofte framstår matematikken som upraktisk, abstrakt og fjern frå daglegdagse problem og behov. Men det treng ikkje vera slik.

Matematikken har alltid vore motivert frå praktiske og daglegdagse problem. Dei gamle grekarane studerte geometri for å måla opp jordbruksland. Eksponentialfunksjonen finn me i Babylon, der han vert brukt til å rekna med rentesrente. Newton fann opp derivasjon, fordi han trong det for å forklara korleis planetane rører seg.

Det er skulen som har skapt eit feilaktig inntrykk av matematikk hovudsakleg handlar om å løysa abstrakte problem. Skulen belønner dei som liker å løysa abstrakte problem utan bry seg om kvifor. Mange kontekstuelle tenkjarar, som kan resonnera logisk og grundig når problema er konkrete og meiningsfulle, vert straffa. Verda treng nokre abstrakte tenkjarar, for å utvikla ny teori som kanskje ein gong kan verta nyttig. Verda treng *svært mange* kontekstuelle tenkjarar, som kan løysa praktiske og jordnære problem presist, vha. matematiske metodar.

Sjølv om abstrakt tenking er nyttig i all matematikk, so treng ein ikkje vera ein racer i abstrakt matematikk for å verta dyktig i matematiske metodar. For dei fleste har det overhodet ingen verdi å kunna løysa abstrakte problem, utan som ein del av eit konkrete problem.

Denne boka handlar fyrst og framst om *matematisering* (eller matematisk modellering), kunsten å ta konkrete, daglegdagse problem, og gje dei ein matematisk form, slik at me kan løysa dei med kjende og generelle matematiske metodar. Problemet må rett nok løysast med abstrakte teknikkar, men dét har ingen verdi om me ikkje også kan føra løysinga tilbake til det konkrete problemet. So langt det er råd, vil me sjå på både konkrete og abstrakte resonnementer, og sjå at dei gjev same resultat.

Dette skal vera ei bok for mange av dei som trur at dei ikkje forstår matematikk. Sjølv om ein alltid har gjort det dårleg i skjøna abstrakte resonnementer eller pugga abstrakte løysingsteknikkar, so er der ingen grunn for at ein ikkje kan forstå dei same resonnementa i ein konkret kontekst.

1.1 Om presentasjonen

Boka går ut frå at studentar lærer (1) ved døme (modellæring) og (2) ved å prøva seg på eiga hand (aktiv læring). Innhaldet er difor, i all hovudsak, oppgåver med og utan løysingsforslag. Som regel kjem oppgåvene i par, éi med løysingsforslag (eksempeloppgåve) og éi utan (øvingsoppgåve). Eksempeloppgåva er meint å forklara løysingsmetoden, og øvingsoppgåva er meint som øving.

Nokre nye omgrep og reknereglar vert innført gjennom døma, utan formell definisjon. Somme tider vert dei utdjupa i påfylgjande merknader. Hensikta er at lesaren skal læra seg korleis omgrep og reknereglar vert nytta i praksis, og bruka dei naturleg. Det har ingen verdi å pugga definisjonar. Definisjonane er utelatne for å unngå å freista til misbruk.

Boka er ikkje meint for skumlesing eller som oppslagsbok. Det er viktig å lesa alle døma og løysa oppgåvene etter kvart for å få med seg nye omgrep og idéar. Det handlar like mykje om å koma inn i eit tankesett og verta van med å tenkja matematisk, som om å læra nokre nye omgrep og teknikkar.

Oppgåvene liknar mykje på kvarandre; likevel er nesten alle øvingsoppgåvene forskjellige. Målet har vore å innføre éin og berre éin ny idé i kvar oppgåve. Lesaren bør ta seg tid til å reflektera over oppgåvene og løysingsteknikkane, og samanlikna liknande oppgåver. Få vil klara å pugga løysingsmetodane i alle dei variantane som er brukt. Håpet er at lesaren vil læra seg nokre få kjernemetodar som kan varierast og tilpassast ulike oppgåver. Det krev at ein tenkjer gjennom kvar oppgåveløysing og reflekterer over kva som er nytt og kva som er gjenbrukt.

Der er ingen fasit til øvingsoppgåvene. Fasit har svært ofte ein negativ effekt, og skapar eit einsidig fokus på å finna rett svar, meir eller mindre på måfå. For å ha nytte av matematikken i praksis, er det uunnverleg at ein evnar å vurdera eigne svar kritisk, å overtyda andre om at ein har tenkt rett, og å stola på sine eigne evner. Desse evnene øver ein opp ved å drøfta svar og løysingar med andre, ikkje ved å samanlikna med ein fasit.

Løysingsforslaga er ikkje konsekvente. Liknande oppgåver er somme tider løyst på forskjellig vis. Det er fordi me ikkje ynskjer å skapa nokon illusjon om at der er éin riktig eller beste måte å gjera ting på. Somme tider kan ein få inntrykk av at løysingane i boka er unødig tungvinte. Det kan ha ulike grunnar. Nokre løysingar er skrive for å byggja direkte på idéar frå oppgåvene før. Andre løysingar er skrive for å innføra idéar som generaliserer til vanskelegare problem. Kvar og ein må finna løysingsstrategiar som dei trur på. Der er ingen premie for å velja same løysingsstrategi som forfattaren. Ve den førelesaren som tenkjer slik.

Difor: *Dann studiegrupper*. Forklar problem og løysingar for kvarandre. Øv på å forklara slik at andre med liknande bakgrunn forstår. Vurder og kritiser svarforslag for kvarandre.

1.2 Kjelder

Niss and Højgaard [2011] skriv om åtte ulike matematikkompetansar, der symbol- og formelmanipulasjon berre er éin av dei. Thorvaldsen [2002] skriv om matematikkens kulturhistorie, og nemner mange av dei praktiske problema som har inspirert utviklinga i fleire tusen år. Pestalozzi var skulereformator i Sveits rundt 1800, og han peikte mellom anna på at den store avstanden mellom skulekvardagen og heimkvardagen var skulen si store ulukke. Hovudverket finst i ein lettlest, forkorta utgåve på engelsk [Pestalozzi, 1908]. Sæbø et al. [2015] skriv om favoriseringa av digitale tenkjarar i høgare utdanning, der kontekstuelle tenkjarar vert diskriminert.

Den oppgåvedrivne metodikken i boka er inspirert av Colburn [1822] og til dels Hendrix [1947], og vert gjerne kalla ein induktiv undervisningsmetode. Idéen med å bruka eksempel- og øvingsoppgåver i par er formalisert og systematisert av Clark et al. [2005].

2 Prosentrekning

2.1 Grunnleggjande prosentrekning

2.1.1 Prosentdel

Til øvingstimen 1 (19. august 2019). De bør prioritera fylgjande oppgåver: 2.1/2, 2.5/6, 2.7/8, 2.10/11, 2.13, 2.14/15, 2.21/22, 2.25.26. Dersom de kan løysa eksempeloppgåva utan å bruka løysingsforslaget, er det lov å hoppa over øvingsoppgåva som fylgjer. Det kan vera hardt å koma gjennom alle desse oppgåvene i løpet av timen, men det er viktig.

Eksempeloppgåve 2.1. I ein studie om sparing vert 200 studentar spurde om dei sparer i BSU (bustadsparing for ungdom). Av dei svarer 80 studentar ja. Kor stor prosentdel av studentane sparer i BSU?

Løysing 2.1. Delen av studentane som sparer i BSU, er

80 sparande studentar utav 200 studentar totalt,

som svarer til brøken

$$\frac{80}{200}.$$

Me kan skriva om brøken slik at me får 100 i nemnaren:

$$\frac{80}{200} = \frac{2 \cdot 40}{2 \cdot 100} = \frac{40}{100} = 40\%.$$

Prosent tyder det same som hundredelar, so 40 hundredelar, eller 40% av studentane sparer i BSU.

Øvingsoppgåve 2.2. I ein annan studie vert 1000 arbeidstakarar spurde om dei sparer til pensjon utover obligatorisk tenestepensjon. Av dei svarer 140 ja. Kor stor prosentdel av arbeidstakarane sparer til ekstra pensjon?

Eksempeloppgåve 2.3. Av 135 studentar, strauk 53 til eksamen. Kor stor er strykprosenten?

Løysing 2.2. Strykdelen er 53 av 135, dvs.

$$\frac{53 \text{ studentar}}{135 \text{ studentar}} = \frac{53}{135} \approx 0{,}3926 = \frac{39{,}26}{100} = 39{,}26\%.$$

Strykdelen er altso 39,26%.

Øvingsoppgåve 2.4. På ein annan eksamen var der 117 studentar og 12 av dei fekk A. Kor stor prosentdel fekk A?

Eksempeloppgåve 2.5. Der er 20,5% utanlandske studentar på masterstudiet. Totalt er der 117 studentar. Kor mange utlendingar studerer på studiet?

Løysing 2.3. Talet på utlendingar er 20,5% av 117, eller mao.

$$20{,}5\% \cdot 117 = 0{,}205 \cdot 117 = 23{,}985.$$

Sidan det her er tale om personar, må svaret vera eit heltal. Der er 24 utanlandske studentar på studiet.

Øvingsoppgåve 2.6. På hovudoppgåva fekk 14,8% av studentane A. Der var 88 studentar på studiet. Kor mange studentar fekk A?

2.1.2 Prosentvis endring

Eksempeloppgåve 2.7. Mjølka kosta 15kr. per liter i fjor, men prisen er auka med 3%. Kor mykje kostar mjølka no?

Løysing 2.4. Prisen er auka med 3% av 15kr., dvs. $15 \cdot 0{,}03$ kr. Me skriv (i kroner)

$$\text{nypris} = 15 + 3\% \cdot 15 = 15 + 15 \cdot 0{,}03 = 15 + 0{,}45 = 15{,}45.$$

Merknad 2.1. Merk at me ikkje skriv at nyprisen er $15 + 3\%$. Prosenter viser alltid til ein viss del av noko, og i matematisk notasjon må me skriva eksplisitt kva me tek ein prosentdel av: $15 + 3\% \cdot 15$. I vanleg språk er det lov å slurva litt. Når me skriv at prisen er 15kr. og aukar med 3%, so skjøner me (implisitt) at auka er 3% av 15kr.

Øvingsoppgåve 2.8. Kvitost brukte å kosta 90 kr. per kilo, men prisen er auka med 4%. Kor mykje kostar osten no?

Øvingsoppgåve 2.9. Marta lånte 750 kroner i fjor. Etter eit år er der påløpt 5% rente. Kva er lånesaldoen (uteståande beløp) no?

Eksempeloppgåve 2.10. Konsulentselskapet *Gode råd A/S* har kostnader på 10 millionar kroner i 2017. Av kostnadane er 80% personalkostnader, 10% husleige, og 10% andre utgifter. I 2018 aukar husleiga med 5%. Dei andre kostnadene aukar ikkje. Kor mykje aukar dei totale kostnadene i prosent?

Løysing 2.5 (Forslag 1)**.** Lat oss fyrst rekna ut kostnadsauka i kroner. Husleiga h utgjer 10% av 10 millioner kroner (mkr), dvs.

$$h = \frac{10}{100} \cdot 10\text{mkr.} = 1\text{mkr.}$$

Me kaller endringa i husleiga for Δh. Ho auker med 5% av 1 mkr., dvs.

$$\Delta h = \frac{5}{100} \cdot 1\text{mkr.} = 0{,}05\text{mkr.}$$

Til slutt må me finna ut kor stor del auka på 0,05 mkr. utgjer av kostnadene på $k = 10$ mkr. Dvs.

$$\frac{\Delta h}{k} = \frac{0{,}05\text{mkr}}{10\text{mkr}} = \frac{0{,}05}{10} = \frac{0{,}5}{100} = 0{,}5\%.$$

Kostnadsauka er altso 0,5%.

Merknad 2.2. Bokstaven Δ (i Δh) over er gresk og heiter *delta*. Det er vanleg notasjon i matematikk å kalla ei endring i ein variabel x for Δx.

Løysing 2.6 (Forslag 2)**.** Kostnadsauka er på 5% av 10% av dei totale kostnadene. Denne auka, på 5% av 10%, kan skrivast som

$$\frac{5}{100} \cdot \frac{10}{100} = \frac{50}{10000} = \frac{0{,}5}{100} = 0{,}5\%$$

av dei totale kostnadene. Kostnadsauka er altso 0,5% av dei totale kostnadene.

Merknad 2.3. Over har me fått to løysingsforslag. Forslag 2 er kortare og kan sjå enklare ut, men det er svært abstrakt. Me reknar med prostentdelar utan å skriva kva det er prosentdelar av. Mange vil finna det vanskeleg å verta overtydd om at svaret er rett, når argument er sopass abstrakt.

Forslag 1 reknar med kronar og vert difor meir konkret. Dette forslaget er betre egna til å overtyda ein lesar som ikkje er so god på prosentrekning. Om det trengst, kan ein vera endå grundingare og meir konkret, ved å setja opp alle kostnadene for to år i ein tabell,

Det er viktig at ein berre bruker forslag 2 dersom (1) ein veit at lesaren kan nok prosentrekning til å fylgja resonnementet, og (2) ein sjølv er god nok på abstrakt matematikk til å forvissa seg om at metoden er brukt rett. Sjølv om det er meir skriving skal ein rekna konkret dersom ein er i tvil.

Øvingsoppgåve 2.11. Gullsmed Syversen hadde eit varelager verd ein million kroner. Av dette var 70% sølvsmykker og 30% gullsmykker. I eit innbrot vart 75% av gullsmykkene stolne. Ingen av sølvsmykka vart stolne. Kor mykje tapte gullsmeden?

1. Kor mykje tapte han i kroner?
2. Kor mykje tapte han i prosent av verdien på varelageret?

Øvingsoppgåve 2.12. Investoren Bertin Vest har investert 30% av formuen i bankaksjar og 70% i oljeaksjar. I fjor tente han 10% av verdien på bankaksjane. Han korkje tapte eller tente pengar på oljeaksjane. Kor mykje tente han i prosent av den samla aksjeverdien?

2.1.3 Meirverdiavgift

Øvingsoppgåve 2.13. Meirverdiavgifta (mva) er eit påslag på 25% av prisen til seljaren. (Dette gjeld dei fleste varer, nokre varer, t.d. mat, har andre satsar.) Seljaren tek 300kr. for buksa (utan mva). Kor mykje må kjøparen betale for buksa (med mva)?

Eksempeloppgåve 2.14. Ein CD kostar 200kr. med mva. Kor mykje vert betalt til seljaren og kor mykje er mva?

Løysing 2.7 (Enkel løysing)**.** Prisen til seljaren er 100% og mva. er 25%. Totalprisen er då 125% som svarer til 200 kroner. Ein prosent er då $200/125 = 1{,}6$ kroner.

Prisen til seljare er 100% eller $1{,}6 \cdot 100 = 160$ kroner.

Mva-beløpet er $1{,}6 \cdot 25 = 40$ kroner.

Nedanståande løysingsforslag er meir tungvint, men det kan vera nyttig å ta med seg likevel. For det fyrste er det somme tider vanskeleg å verta overbevist om at det enkle resonnementet er korrekt (som løysinga over). For det andre illustrerer det korleis me kan matematisera problemet på ein måte som er overførbar til meir avanserte eller komplekse problem.

Løysing 2.8 (Med modellering)**.** Der er fleire måtar å løysa denne oppgåva på. Dersom ein er usikker på korleis ein skal gå fram, startar me med å matematisera den informasjonen me hev.

Prisen med mva. er oppgjeven, lat oss skriva $p_m = 200$. Spørsmålet gjeld to ukjende storleikar: prisen uten mva. p_u og mva. m. Kva veit me om samanhengane mellom desse tre storleikane?

I alle fall veit me at prisen med mva. er lik prisen utan + mva. Dvs.

$$p_m = p_u + m. \tag{2.1}$$

Dessutan veit me at mva. er 25% av prisen utan mva., dvs.

$$m = 0{,}25 \cdot p_u. \tag{2.2}$$

Det me har gjort so langt er å setja opp ein *modell* som viser samanhengane mellom pris og mva. For å setja opp modellen må me kombinera kunnskap om det praktiske problemet og matematikk, og me må tolka teksta i oppgåva. Når modellen er sett opp, har me ein rein matematisk, abstrakt formulering av problemet. Me seier at me har *matematisert* problemet.

No kan me setja inn for p_m og for m i likning (2.1):

$$200 = p_u + 0{,}25 \cdot p_u. \tag{2.3}$$

Dette er ein heilt ordinær likning med ein ukjend. Neste steg er å løysa modellen (likninga).

Me kan trekja saman på høgre side, og få

$$200 = 1{,}25 \cdot p_u. \tag{2.4}$$

Me kan dela med same tal på båe sider:

$$\frac{200}{1{,}25} = p_u, \tag{2.5}$$

eller $p_u = 160$. Prisen utan mva. er altso 160 kr.

For å finna mva. må me gå tilbake til modellen, i likning (2.2):

$$m = 0{,}25 \cdot p_u = 0{,}25 \cdot 160 = 40. \tag{2.6}$$

Meirverdiavgifta er altso 40 kr.

Øvingsoppgåve 2.15. Ei vare kostar 100 kr. med mva. Kor mykje får seljaren? Kor mykje vert betalt i mva?

Øvingsoppgåve 2.16. Ei vare kostar 100 kr. med mva. Kor stor del av utsalsprisen er mva. (i prosent)?

Øvingsoppgåve 2.17. Ei vare kostar 240 kr. med mva. Kor mykje får staten i mva?

Øvingsoppgåve 2.18. Ei vare kostar 240 kr. med mva. Kor stor del av utsalsprisen er mva. (i prosent)?

Øvingsoppgåve 2.19. Ei vare kostar 500 kr. med mva. Kor stor del av utsalsprisen er mva. (i prosent)?

Øvingsoppgåve 2.20. Ei vare kostar x kr. med mva., for ein eller annan ukjend x. Kor stor del av utsalsprisen er mva.?

2.1.4 Prosent og prosentpoeng

Eksempeloppgåve 2.21. Avisa gjer kvar månad ei meiningsmåling der dei spør 1000 personar kva dei ville ha stemt om det var valg dagen etter. I april svarte 219 personar at dei ville ha stemt Arbeidarpartiet, og i mai svarte 271 personar det same. Kor mykje har oppslutnaden auka i prosent?

Løysing 2.9. Endringa er $271 - 219 = 52$, som utgjer

$$\frac{52}{219} = 0{,}237\,44 = 23{,}7\%.$$

Øvingsoppgåve 2.22. Line har eit lån på 10 000 kroner. Ho betaler ikkje avdrag, berre renter. I fjor betalte hun 400 kroner i renter, og i år betalte ho 450 kroner. Kor mykje har renteutgiftene auka i prosent?

Øvingsoppgåve 2.23. Line har eit lån på 10 000 kroner. Ho betaler ikkje avdrag, berre renter. I fjor betalte ho 400 kroner i renter, og i år betalte ho 450 kroner. Kva var rentesatsen i fjor (i prosent)? Kva er rentesatsen i år?

Øvingsoppgåve 2.24. Avisa gjer kvar månad ei meiningsmåling der dei spør 1000 personar kva dei ville ha stemt om det var valg dagen etter. I april svarte 200 personar at dei ville ha stemt Høgre, og i mai var det same talet 210.

1. Kva var prosentvis oppslutnad i april?

2. Kva var prosentvis oppslutnad i mai?

3. Kor mykje har oppslutnaden auka i prosent?

Eksempeloppgåve 2.25. Avisa gjer kvar månad ei meiningsmåling der dei spør 1000 personar kva dei ville ha stemt om det var valg dagen etter. I april svarte 4% at dei ville røysta KrF, og i mai var det same talet 3%.

1. Kor mykje har oppslutnaden endra seg i prosent?

2. Kor mykje har oppslutnaden endra seg i prosentpoeng?

Løysing 2.10. Oppslutnaden var 4% eller 4 prosentpoeng, og vart 3% eller 3 prosentpoeng. Det er ei endring på $3-4=-1$ prosentpoeng, eller ei nedgang på eitt prosentpoeng.

Den prosentvise nedgangen er målt relativt til den gamle oppslutnaden på 4%, dvs.

$$\frac{1\,\text{prosentpoeng}}{4\,\text{prosentpoeng}} = \frac{1}{4} = 25\%.$$

Nedgangen er altso 25%, eller med forteikn, ei endring på -25%.

Merknad 2.4. Når renta aukar, t.d. frå 4% til 5%, seier me gjerne at auka er eitt prosentpoeng. Det er den absolutte endringa. Den relative (prosentvise) auka er 25%, sidan eitt prosentpoeng er 25% av den opprinnelege prosentsatsen på fire prosent(poeng).

Det same gjeld andre tilfelle der me måler i prosent. Me kan skildra den absolutte endringa i prosentpoeng, eller den relative endringa i prosent av den opprinnelege prosentsatsen.

Øvingsoppgåve 2.26. Det er fagfest på kjemistudiet. Dei har kjøpt inn fleire kasser cider som held 6% alkohol. Denne spritar dei opp. Labforsøk viser at den ferdige drikken held 9%.

1. Kor mykje har dei auka alkoholinnhaldet (alkoholkonsentrasjonen) i prosentpoeng?

2. Kor mykje har dei auka alkoholinnhaldet (alkoholkonsentrasjonen) i prosent?

Øvingsoppgåve 2.27. Lars har eit lån på 100 000 kroner. Han betaler ikkje avdrag, berre renter. I fjor var rentesatsen 4%, og i år er han 3,5%. Kor mykje betalte Lars i renter i fjor, og kor mykje i år? Kor mykje har rentene endra seg i prosent?

Øvingsoppgåve 2.28. Avisa gjer kvar månad ei meiningsmåling der dei spør 1000 personar kva dei ville ha stemt om det var valg dagen etter. I juni svarte 245 personar at dei ville ha stemt Arbeidarpartiet, og i juli var det same talet 210.

1. Kva var prosentvis oppslutnad i juni?

2. Kva var prosentvis oppslutnad i juli?

3. Kor mykje har oppslutnaden endra seg i prosent?

2.1.5 Vidare lesing

Det kan vera nyttig å lesa fleire vinklingar på stoffet.
Lesing: Bjørnestad *et al*, kapittel 1.20.
Oppgåver: Bjørnestad *et al*, oppgåve 1.63.

2.2 Vekstfaktor

Til øvingstimen 2 (26. august 2019). De bør prioritera fylgjande oppgåver: 2.29/30, 2.32/33, 2.26–37, 2.38/39, 2.42/43, 2.45/46. Dersom de kan løysa eksempeloppgåva utan å bruka løysingsforslaget, er det lov å hoppa over øvingsoppgåva som fylgjer. Det kan vera hardt å koma gjennom alle desse oppgåvene i løpet av timen, men det er viktig

2.2.1 Vekst over fleire periodar

Ei prisauke frå 10 kr. til 15 kr. kan skildrast på to måtar, anten *additivt* (med pluss) eller *multiplikativt* (med ganging):

$$15\text{kr} = 10\text{kr} + 5\text{kr} \tag{2.7}$$

$$15\text{kr} = 10\text{kr} \cdot 1{,}50 \tag{2.8}$$

Hittil har me arbeidd med additiv endring, anten me har skildra det som ei absolutt auke på 5kr. eller ei relativ auke på 50%.

Merk at me òg taler om additiv og multiplikativ endring om ei nedgang, t.d. frå 10kr. til 8kr.:

$$8\text{kr} = 10\text{kr} - 2\text{kr} \tag{2.9}$$

$$8\text{kr} = 10\text{kr} \cdot 0{,}80 \tag{2.10}$$

Faktorane 1,50 i (2.8) og 0,80 i (2.10) kallar me for *vekstfaktorar*.

Eksempeloppgåve 2.29. Sett at me set inn x kr. på bankkonto til 3% rente per år. Saldoen etter eitt år er då x kr. pluss $x \cdot 0{,}03$ kr. i renter, til saman $x + x \cdot 0{,}03$. Finn vekstfaktoren på bankkontoen.

Løysing 2.11. Legg merke til den felles faktoren x i uttrykket for saldoen (inneståande beløp på kontoen). Då kan me setja x utanfor ein parentes og få.

$$x + x \cdot 3\% = (x \cdot 1 + x \cdot 3\%) = (x \cdot 1 + x \cdot 0{,}03) = x \cdot (1 + 0{,}03).$$

Vekstfatoren er då $1 + 0{,}03$, eller penare skrive 1,03.

Merk at me ikkje treng å kjenna beløpet x for å finna vekstfaktoren.

Øvingsoppgåve 2.30. Bustadprisane har stige med 6,5% siste året. Kva er vekstfaktoren?

Øvingsoppgåve 2.31. Prisindeksen er stige frå 1200 til 1216 siste året. Kva er vekstfaktoren for prisindeksen?

Løysing 2.12 (Utfyllingsforslag). Me løyser oppgåva i to steg.

1. Finn prosentvis auke. Prisindeksen har gått opp 16 poeng frå 1200 poeng. Kva er prosentvis auke?
2. Finn vekstfaktoren ut frå den prosentvise auka.

Fullfør kvart steg på eiga hand.

Eksempeloppgåve 2.32. Gjennomsnittleg kvadratmeterpris på nye bustader var 20 250 kr. i fjor. I år er prisen 20 010 kr. Kva er vekstfaktoren?

Løysing 2.13 (Tostegsløysing). Me ser ein prisnedgang på $20\,250 - 20\,010 = 240$ kr. Prosentvis nedgang er då

$$\frac{240}{20250} = 0.0119 = 1{,}19\%.$$

Me kan skriva den nye prisen som

$$20\,010 = 20\,250 - 0{,}0119 \cdot 20\,250 = (1 - 0{,}0119) \cdot 20\,250 = 0{,}988 \cdot 20\,250.$$

Vekstfaktoren er altso 0,988.

Løysing 2.14 (Likning). Me kan modellera auka direkte med den ukjend vekstfaktoren. Lat oss kalla vekstfaktoren for v. Auka er da modellert som

$$\text{nypris} = v \cdot \text{førpris},$$

eller

$$20\,010 = v \cdot 20\,250.$$

Dette er ei enkel fyrstegradslikning som me løyser ved å dela på førprisen:

$$\frac{20\,010}{20\,250} = v. \tag{2.11}$$

Divisjonen kan me ta på kalkulator, og me får at vekstfaktoren er $v \approx 0{,}9881$. Me ser ein prisnedgang på $20\,250 - 20\,010 = 240$ kr.

Øvingsoppgåve 2.33. Ola investerte 7500 kr. i aksjer i fjor. I år er porteføljen hans verd 6500 kr. Kva er vekstfaktoren på porteføljen hans?

Øvingsoppgåve 2.34. En cellekultur vog 200 gram i går. I dag veg han 350 gram. Kva er vekstfaktoren åt cellene?

Øvingsoppgåve 2.35. Kari investerte 9000 kroner i aksjefond i fjor. I år er andelen hennar verd 31 000 kr. Kva er vekstfaktoren på aksjefondet?

Merknad 2.5. Likning (2.11) i løysingsforslaget over er ofte brukt som definisjonen på *vekstfaktor*.

2.2.2 Påfylgjande prosentoperasjonar

Øvingsoppgåve 2.36. Prisen var 250 kr for to år sidan, men har auka med ein vekstfaktor på 1,1 to år på rad. Kva er prisen no?

Øvingsoppgåve 2.37. Buksa og jakka kostar 1000 kr kvar. Buksa gjekk opp 2% i fjor, og ned 4% i år. Jakka gjekk ned 4% i fjor, og opp 2% i år. Kor mykje kostar buksa og jakka no?

Eksempeloppgåve 2.38. Prisen var 200 kr for to år sidan, men har auka med ein vekstfaktor på 1,1 to år på rad. Kva er den samla vekstfaktoren over to år? Kva er samla prosentvis auke?

Løysing 2.15. Etter to år får me (i kroner)

$$\text{nypris} = 200 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1 \tag{2.12}$$

Me kan ganga faktorane i den rekkjefylgja me ynskjer. Me veit at $1{,}1 \cdot 1{,}1 = 1{,}21$, og dermed har me

$$\text{nypris} = 200 \cdot 1{,}21 \tag{2.13}$$

Den samla vekstfaktoren er altso 1,21, og den prosentvise auka er 21%.

Merknad 2.6. Legg merke til korleis me bruker *multiplikasjon* med påfylgjande vekstfaktorar. Dette er viktig. Når me arbeider med vekstfaktor er det alltid multiplikasjon, og ikkje addisjon, og me skal sjå vidare at mange store og samansette problem vert enklare på denne måten.

Øvingsoppgåve 2.39. Du set inn 400 kroner på konto til 2% rente. Kva er vekstfaktoren? Kva er samla vekstfaktor over to år?

Øvingsoppgåve 2.40. Du set inn 1200 kroner på konto til 3% rente. Kva er samla prosentvis saldoauke over to år?

Øvingsoppgåve 2.41. Buksa og jakka kostar 1000 kr kvar. Jakka gjekk ned 4% i fjor, og opp 2% i år. Buksa gjekk opp 2% i fjor, og ned 4% i år. Kva er den samla prosentvise auka for jakka? For buksa?

Eksempeloppgåve 2.42. Prisauka i år er på 2%. Lønsmottakarane har fått lovnad om ein reallønsvekst på 1,5%. Kor mykje må lønningane auka nominelt?

Løysing 2.16. Rekninga i denne oppgåva er enkel, men det kan vera vanskelegare å verta overtydd om at me matematiserer riktig. Det kan difor vera nyttig å modellera svært omstendeleg.

For å vera konkret, lat oss seia at me ser på lønsauka for 2017 og 2018. Me taler gjerne om 2017-kroner og 2018-kroner for å skilja mellom verdien (kjøpekrafta) krona har på ulike tidspunkt. Når prisstiginga er 1,5%, tyder det at du treng 1,5% fleire 2018-kroner enn 2017-kroner for å ha same kjøpekraft.

Lat oss seia at løna var x 2017-kroner i 2017. Det er det same som $x \cdot 1{,}015$ 2018-kroner. For å ha null reallønsvekst, treng lønsmottakarane altso ei nominell lønsvekst på 1,5%.

No vil me auka kjøpekrafta med 2%. Dvs. at løna må auka frå $x \cdot 1{,}015$ 2018-kroner til $x \cdot 1{,}015 \cdot 1{,}02$ 2018-kroner. Dette kan forenklast som

$$x \cdot 1{,}015 \cdot 1{,}02 = x \cdot 1{,}0353.$$

Løna skal altso auka frå x 2017-kroner til $x \cdot 1{,}0353$ 2018-kroner, som gjev ei nominell lønsvekst på 3,53%.

Øvingsoppgåve 2.43. Prisauka i år er på 1,8%. Kor mykje må lønningane auka (nominelt) for å få null reallønsvekst?

Øvingsoppgåve 2.44. Prisauka i år er på 1,5%, og lønsmottakarane krev 2,5% reallønsvekst. Kor stor må den nominelle lønsauka vera for å få det til?

Eksempeloppgåve 2.45. Sist år har lønningane stige 1%, men prisauka har vore 2%. Kor stor har reallønsveksten vore?

Løysing 2.17. Lat oss seia at lønninga i fjor var x 2017-kroner. Vekstfaktoren nominelt var 1,01. Me er interessert i den reelle vekstfaktoren, lat oss kalla han v.

Dersom me reknar med nominell løn, vert lønninga i år $x \cdot 1{,}01$ 2018-kroner. Med realløn, får me $x \cdot v$ 2017-kroner. Sidan ein 2017-krone er verd det same som 1,02 2018-kroner, kan me rekna realløna om til nominell løn, som gjev $x \cdot v \cdot 1{,}02$ 2018-kroner.

No har me to uttrykk for nominell løn etter auka, og dei må vera like

$$x \cdot 1{,}01 = x \cdot v \cdot 1{,}02.$$

Ved å dela på båe sider, får me

$$\frac{1{,}01}{1{,}02} = v.$$

Med kalkulator finn me at vekstfaktoren er 0,9902. Prosentvis reallønsauke er $v - 1 = -0{,}0098$ eller $-0{,}98\%$.

Negativt tal tyder her ein reallønsnedgang på 0,98%.

Øvingsoppgåve 2.46. Sist år har lønningane stige 2%, og prisauka har vore 1%. Kor stor har reallønsveksten vore?

2.2.3 Generelle observasjonar

Til øvingstimen 3 (28. august 2019). **NB.** Dersom du er på etterskot med oppgåvene forrige veke, bør du bruka økta i dag til å henta deg inn igjen. Når me går vidare, er me avhengige av at du forstår stoffet frå dei to fyrste øktene, men økta i dag kan du klara deg utan ein stund.

1. Løys oppgåvene nedanfor (i dette delavsnittet).
2. Løys fylgjande oppgåver frå læreboka: 1.2, 1.3, 1.5, 1.18.

Eksempeloppgåve 2.47. Sett at du set inn eit beløp x på bankkonto og får rente r per år i to år. Er det alltid slik at det totale rentebetalinga er større enn $2r$, uansett verdi på x og r?

Døme 2.1. Før me gjer oppgåva som han står, lat oss sjå på ein variant med konkrete tal.

Sett at du set inn 1000 kr. på bankkonto og får 10% rente per år i to år.

	Saldo inn	Rente	Saldo ut
År 1	1000	$10\% \cdot 1000 = 100$	$1000 + 100 = 1100$
År 2	1100	$10\% \cdot 1100 = 110$	$1100 + 110 = 1210$

Rentene på tusenlappen som du starta på utgjer 10% per år, eller 20% til saman. Det fyrste året har me berre fått den eine hundrelappen som utgjer 10%. Det andre året har me fått 10 kr. ekstra. Kvifor det?

Den ekstra tiaren er rentene på hundrelappen som me fekk året før. Dette utgjer 10% av 10% av 1000 kr. Mao. dei totale rentene me har fått er

$$2 \cdot 10\% + 10\% \cdot 10\% = 2 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}2 + 0{,}01 = 20\% + 1\%.$$

Den éine prosenten som me får ekstra kallar me gjerne for rentesrente, dvs. renter på renter.

Når me samanliknar med den opprinnelege oppgåva er $r = 10\% = 0{,}1$ og $x = 1000$.

Løysing 2.18. Dette problemet er lett å løysa med algebra. Både sparebeløpet x og rentesatsen r er ukjende, men me kan like fullt skriva $(1 + r)$ for vekstfaktoren, og for saldoen etter to år har me

$$y = x \cdot (1 + r)^2.$$

Kan me skriva potensuttrykket på andre måtar?

Me har

$$(1 + r)^2 = (1 + r)(1 + r) = 1 + r + r + r^2 = 1 + 2r + r.$$

Mao.

$$y = x \cdot (1 + 2r + r^2).$$

Den totale vekstfaktoren over to år er altso $1 + 2r + r^2$. Sidan $r^2 > 0$, vert altso den totale renteutbetalinga alltid større enn $2r$.

Merknad 2.7. Dersom den algebraiske løysinga er vond å forstå, prøv å samalikna ho med dømet over. Du kan godt skriva om dømet med vekstfaktor slik at det får den same strukturen som den algebraiske løysinga, og like gjerne omvendt, skriva om algbraen som ein tabell etter skjema frå dømet.

Det er heilt normalt at ein må studera døma frå fleire vinklar for å forstå det.

Merknad 2.8. Lat oss sjå litt nærare på saldoen etter to år. Skriv

$$y = x \cdot (1 + 2r + r^2) = x + x \cdot 2r + x \cdot r^2.$$

Her har me tre ledd. Det fyrste, x, er den opprinnelege saldoen. Det neste, $x \cdot 2r$ eller $2xr$ er rentene for to år. Det siste $x \cdot r^2$ vert kalla *rentesrenter*, dvs. rentene me får andre året på rentene som vart lagt til fyrste året.

Rekneregel 2.1 Rekneregel: Multiplikasjon av parentesuttrykk

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \tag{2.14}$$
$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a \tag{2.15}$$
$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + b \cdot c + a \cdot d + b \cdot d \tag{2.16}$$

Rekneregel 2.2 Rekneregel: Kvadratsetningane

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{2.17}$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{2.18}$$
$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2 \tag{2.19}$$

Øvingsoppgåve 2.48. Sett at prisen på ein vare går opp med r prosent eit år, og ned r prosent året etter. Kva er den samla endringa over to år, i prosent?

Øvingsoppgåve 2.49. Produkt A gjekk opp 2% i fjor, og ned 4% i år. Produkt B gjekk ned 4% i fjor, og opp 2% i år. Me veit ikkje kva produkta kosta i utgangspunktet. Kva produkt har gått (prosentvis) mest ned i pris samanlagt over desse to åra, eller har dei gått like mykje ned?

2.3 Vidare lesing

Det kan vera nyttig å lesa fleire vinklingar på stoffet.

Lesing: Bjørnestad *et al* (8. utgåve), kapittel 1.21.

Oppgåver: Bjørnestad *et al* (8. utgåve), oppgåve 1.67.

3 Årleg prosentvekst

Til øvingstimen 4 (2. september 2019)**.** Løys oppgåvene i kapittel 3 (dette) og so langt som de kjem i avsnitt 4.1.

Eksempeloppgåve 3.1. Sett at me set inn 100 kr. på bankkonto til 5% rente per år. Kva er saldoen etter to år? Kva er saldoen etter fire år?

Løysing 3.1. Det er lett å sjå kva som skjer når me set opp utrekningane år for år i ein tabell. Alle beløpa er i kroner.

År	Saldo	Rente	Ny saldo
1	100	$100 \cdot 5\% = 5$	$100 + 5 = 105$
2	105	$105 \cdot 5\% = 5{,}25$	$105 + 5{,}25 = 110{,}25$
3	110,25	$110{,}25 \cdot 5\% = 5{,}5125$	$110{,}25 + 5{,}5125 = 115{,}7625$
4	115,7625	$115{,}7625 \cdot 5\% \approx 5{,}7881$	$115{,}7625 + 5{,}7881 = 121{,}5506$

Saldoen er altso 110,25 kroner etter to år og 121,55 kroner etter fire år.

Merknad 3.1. Kor mange desimaler ein skal ta med avheng av samanhengen. Her har me brukt to desimalar i sluttsvaret som er vanleg for kronebeløp, og to desimalar ekstra i mellomrekningane for å unngå at fleire små avrundingsfeil til saman vert ein stor feil.

Øvingsoppgåve 3.2. Eit par bukser kostar 1000kr. Prisen aukar med 10% per år. Kva er prisen etter to år? Og etter tre år?

Eksempeloppgåve 3.3 (Sparekonto)**.** Ola har ein sparekonto med 3% rente. Han set inn 1000 kr. ved starten av året. Kva er saldoen etter ...

1. eitt år?

2. tre år?

3. ti år?

Løysing 3.2 (Fyrste forsøk)**.** Det er enkelt og oversiktleg å setja opp ein tabell over renter og saldo på kontoen år for å, t.d. slik:

År	Saldo 1. januar	Rente	Ny saldo
1	1000 kr.	$1000 \cdot 0{,}03 = 30$ kr.	1030 kr.
2	1030 kr.	$1030 \cdot 0{,}03 = 30,90$ kr.	1060,90 kr.
3	1060,90 kr.	$1060{,}90 \cdot 0{,}03 \approx 31{,}83$ kr.	1092,73 kr.
4	1092,73 kr.	$1092{,}73 \cdot 0{,}03 \approx 32{,}78$ kr.	1125,51 kr.
5	1125,51 kr.	$1125{,}51 \cdot 0{,}03 \approx 33{,}77$ kr.	1159,28 kr.
6	1159,28 kr.	$1159{,}28 \cdot 0{,}03 \approx 34{,}78$ kr.	1194,06 kr.
7	1194,06 kr.	$1194{,}06 \cdot 0{,}03 \approx 35{,}82$ kr.	1229,88 kr.
8	1229,88 kr.	$1229{,}88 \cdot 0{,}03 \approx 36{,}90$ kr.	1266,78 kr.
9	1266,78 kr.	$1266{,}78 \cdot 0{,}03 \approx 38{,}00$ kr.	1304,78 kr.
10	1304,78 kr.	$1304{,}78 \cdot 0{,}03 \approx 39{,}14$ kr.	1343,92 kr.

Dersom ein berre er interessert i nokre få år, er det raskt og enkelt å rekna ut 3% rente og ny saldo for hand. Same tabell kan setjast opp i eit rekneark, for dei som ikkje orkar å rekna for hand.

Løysing 3.3 (Med vekstfaktor)**.** I det fyrste forsøket rekna me ut additiv auke for kvart år. No skal me fokusera på vekstfaktoren i staden. Ny saldo er gjeve som

$$S = S_{\text{fr}} + 3\% \cdot S_{\text{fr}} = 1{,}03 \cdot S_{\text{fr}},$$

og denne formelen gjeld kvart år. Litt omstendeleg kan me setja opp tabellen slik:

År	Saldo 1. januar	Ny saldo
1	1000 kr.	$1000 \cdot 1{,}03 = 1030{,}00$ kr.
2	1030 kr.	$1030 \cdot 1{,}03 = 1060{,}90$ kr.
3	1060,90 kr.	$1060{,}90 \cdot 1{,}03 = 1092{,}73$ kr.
4	1092,73 kr.	$1092{,}73 \cdot 1{,}03 = 1125{,}50$ kr.
5	1125,51 kr.	$1125{,}51 \cdot 1{,}03 = 1159{,}28$ kr.
6	1159,27 kr.	$1159{,}28 \cdot 1{,}03 = 1194{,}06$ kr.
7	1194,05 kr.	$1194{,}06 \cdot 1{,}03 = 1229{,}88$ kr.
8	1229,87 kr.	$1229{,}88 \cdot 1{,}03 = 1266{,}78$ kr.
9	1266,77 kr.	$1266{,}78 \cdot 1{,}03 = 1304{,}78$ kr.
10	1304,77 kr.	$1304{,}78 \cdot 1{,}03 = 1343{,}92$ kr.

Øvingsoppgåve 3.4. Prisindeksen var 1200 for åtte år sidan, og har auka med 2% kvar år sidan det. Kva er prisindeksen i år?

4 Eksponentialfunksjonen

4.1 Introduksjon

Eksempeloppgåve 4.1 (Sparekonto)**.** Ola har ein sparekonto med 3% rente. Han set inn 1000 kr. ved starten av året. Kva er saldoen etter ...

1. 100 år?

2. t år?

Løysing 4.1. Me ser av oppgåve 4.1, at me gongar med vekstfaktoren ein gong for kvart år som går. Saldoen etter eitt år er

$$S_1 = 1000 \cdot 1{,}03.$$

Etter to år er han

$$S_2 = 1000 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 = 1000 \cdot 1{,}03^2.$$

Etter tre år er han

$$S_2 = 1000 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 = 1000 \cdot 1{,}03^3.$$

Dette mynsteret held fram slik at me kan skriva saldoen etter t år som

$$S_t = 1000 \cdot 1{,}03^t.$$

Etter 100 år har me $t = 100$, og kan skriva

$$S_{100} = 1000 \cdot 1{,}03^{100} \approx 19\,218{,}63.$$

Merk at dette òg gjeld etter null år ($t = 0$), fordi

$$S_0 = 1000 \cdot 1{,}03^0 = 1000 \cdot 1 = 1000.$$

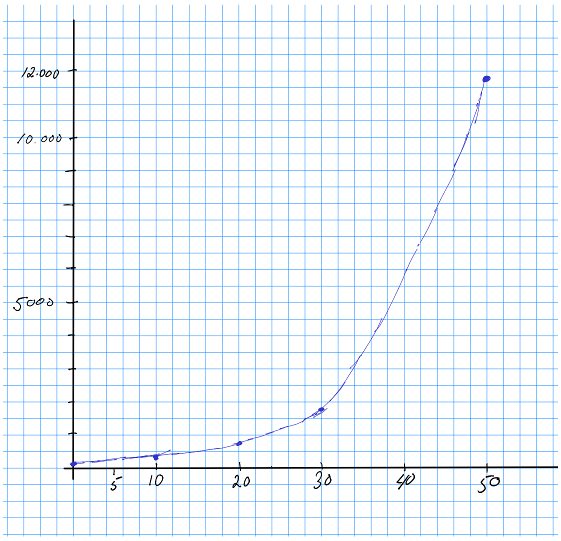
Øvingsoppgåve 4.2. Kari har ein sparekonto med 2,5% rente. Ho set inn 2000 kr. Kva er saldoen etter 50 år?

Øvingsoppgåve 4.3. Bente låner 20 000 kr. til ferie, med 10% rente per år. Ho skal betala tilbake heile lånet om fem år, med renter. (Rentene vert lagt til lånet ved utgangen av kvart år.) Kor mykje må ho betala?

Eksempeloppgåve 4.4. Tenk deg at du set inn 100 kr. i banken til 10% rente. Saldoen etter t år er gjeven ved funksjonen $S(t) = 100 \cdot 1{,}1^t$. Korleis utvikler saldoen seg over lang tid? Plott funksjonen som ei kurve. (Du kan velja om du vil teikna for hand eller bruka datamaskin eller kalkulator.)

Løysing 4.2. Det er greitt å plotta for hand. Me reknar ut eit par verdiar for $S(t)$ med kalkulator, plottar punktane etter beste skjønn, og teiknar kurva på frihand. Dette er nøyaktig nok til å sjå korleis eksponentialfunksjon veks raskare og raskare når t aukar.

t	$100 \cdot 1{,}1^t$
0	100
10	259,3742
20	672,7500
30	1744,9402
50	11 739,0853



Merknad 4.1. Dersom du vil plotta på maskin, og ikkje har egna programvare installert, so kan Wolfram Alpha vera eit godt alternativ. For å løysa oppgåva over i Wolfram Alpha, skriv:

```
plot 100*1.1^t for t=0...50
```

Elles kan du like gjerne bruka programvare eller kalkulator som du kjenner frå før.

Øvingsoppgåve 4.5. Tenk deg at du set 1000 kr. i aksjefond og får 25% avkasting. Verdien av innskotet etter t år er gjeve ved funksjonen $S(t) = 1000 \cdot 1{,}25^t$. Plott verdiutviklinga som ei kurve. (Du kan velja om du vil teikna for hand eller bruka datamaskin eller kalkulator.)

Definisjon 4.1. Ein funksjon på formen $f(t) = c \cdot a^t$ vert kalla ein *eksponentialfunksjon*.

Øvingsoppgåve 4.6. Lag eit plot for å samanlikna verdiutviklinga med 1%, 5% og 10% rente. Lat startverdien vera 1000 kroner.

Øvingsoppgåve 4.7. Lag eit plot som samanliknar funksjonane $f(x) = 1.2^x$ og $g(x) = x^2$ for $x = 0 \dots 50$.

Øvingsoppgåve 4.8. Bruk plottet i forrige oppgåve til å finna omtrentleg x-verdi slik at $1.2^x = x^2$.

4.2 Verditap

Til øvingstimen 5 (4. september 2019). Som absolutt minimum bør de koma gjennom alle oppgåvene i avsnitt 4.2 og 4.3 og helst òg 4.4 i løpet av økta.

Dersom de har tid, må de gjerne arbeida vidare t.o.m. avsnitt 4.8. Sjå i so fall til Øvingstimen 6

Eksempeloppgåve 4.9. Akskjefondet *Nye marknader* har gått dårleg dei siste åra. Verdien har falt med 10% kvart år. Teodor investerte 200 000 kroner for åtte år sidan. Kor mykje er parten hans verd i dag?

Løysing 4.3. Eit verditap på 10% er det same som vekst på -10% eller $-0{,}1$. Dette gjev ein vekstfaktor $v = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$. Verdien på fondsandelen etter t år er då $200\,000 \cdot 0{,}9^t$. No, etter åtte år, er verdien

$$200\,000 \cdot 0{,}9^8 \approx 86\,093{,}44.$$

Parten hans er verd 86 093,44 kroner.

Øvingsoppgåve 4.10. Johnny har kjøpt ein bil til 600 000 kr. Bilen fell 15% i verdi kvart år. Kor mykje er bilen verd etter sju år?

Øvingsoppgåve 4.11. Tenk deg ein fondsandel på 1000 kroner. Lag eit plot for å samanlikna verdiutviklinga når verdien fell med 1%, 5% eller 10% per år.

Dersom du plottar på maskin, kan du godt prøva ulike interval på x-aksa, både $[0 \ldots 25]$ til $[0 \ldots 1000]$.

4.3 Kortare renteperiodar

Eksempeloppgåve 4.12. Jonas låner 10 000 kr. til ny bærbar datamaskin med 12% nominell rente per år. Renta vert lagt til månadsvis, dvs. ein tolvtedel av 12% vert lagt til lånet kvar måned. Etter fire år skal han betala alt tilbake. Kor mykje må han betala?

Løysing 4.4. Sjølv om renta er oppgjeve pro anno (per år), må me rekna med månader. Månadleg rente er $12\%/12 = 1\%$. Vekstfaktoren er dermed 1,01. Pengane står til forrenting i fire år, eller $4 \cdot 12 = 48$ månader. Lånesaldoen som han må gjera opp etter fire år er mao.

$$10\,000 \cdot 1{,}01^{48} \approx 16\,122{,}26.$$

Øvingsoppgåve 4.13. Lise låner 5000 kr. til 10% nominell rente per år. Renta vert lagt til lånet to gongar i året. Etter fem år skal ho betala alt tilbake. Kor mykje må ho betala?

Øvingsoppgåve 4.14. Lise låner 5000 kr. til 10% nominell rente per år. Renta vert lagt til lånet fire gongar i året (kvart kvartal). Etter fem år skal ho betala alt tilbake.

1. Tenk over før du reknar: Må ho betala meir eller mindre enn i oppgåve 4.13 med halvårleg rente?

2. Rekn ut kor mykje ho må betala?

Øvingsoppgåve 4.15. Lise låner 5000 kr. til 10% nominell rente per år. Renta vert lagt til lånet éin gong i året. Etter fem år skal ho betala alt tilbake.

1. Tenk over før du reknar: Må ho betala meir eller mindre enn i oppgåve 4.13 med halvårleg rente?

2. Rekn ut kor mykje ho må betala?

4.4 Effektiv rente

Eksempeloppgåve 4.16. Lat oss samanlikna eit lån med 12% rente p.a. og kvartalsvis forrenting med eit lån med årleg forrenting. Båe låna er på 1000 kr. Kva må rentesatsen på sistnemnde lån vera for at saldoen skal vera den same etter eitt år?

Løysing 4.5. Renta er 12% p.a. svarer til 3% per kvartal. Me kan tabellføra renteutgiftene kvartal for kvartal slik som me har gjort år for år i tidlegare oppgåver.

Periode	Gamal saldo	Rente	Ny saldo
1. kvartal	1000 kr.	30 kr.	1030 kr.
2. kvartal	1030 kr.	30,90 kr.	1060,90 kr.
3. kvartal	1060,90 kr.	$\approx$ 31,83 kr.	1092,73 kr.
4. kvartal	1092,73 kr.	$\approx$ 32,78 kr.	1125,51 kr.

Etter eitt år er lånesaldoen vakse til 1125,51 kr., dvs. ei endring på 125,51 kr. Av den opprinnelege saldoen utgjer dette

$$\frac{125{,}51}{1000} = \frac{12{,}551}{100} = 12{,}551\%.$$

Mao. med årleg forrenting måtte rentesatsen ha vore 12,551% for å gje same saldo etter eit år.

Øvingsoppgåve 4.17. Sett at du treng eit lån på 5000 kr. Lat oss samanlikna to lån. Det eine har halvårleg forrenting med 8% rente p.a. nominelt. Det andre lånet har med årleg forrenting. Kva må rentesatsen på sistnemnde lån vera for at saldoen skal vera den same etter eitt år?

Definisjon 4.2. Oppgåva over spør om *effektiv rente*. Den oppgjevne renta per år er den nominelle renta, men som me har sett avheng den reelle kostnaden av kor ofte rentene vert lagt til lånet. Den effektive renta er den rentesatsen som gjev same kostnad, med årleg, etterskotsvis forrenting.

Øvingsoppgåve 4.18. Sjå på eit lån med månadleg forrenting og 12% rente p.a. Kva er den effektive renta? Speler det noka rolle kor stort lånebeløpet er?

4.5 Kontinuerleg forrenting

Eksempeloppgåve 4.19. Sjå på eit lån med 10% nominell rente per år. Me har sett at lånet veks raskare di oftare forrentinga skjer. Kor ofte går det an å forrenta? Kva er den høgaste vekstfaktoren me kan få ved å forrenta *uendeleg* ofte.

Løysing 4.6. Sei at me har n renteperiodar per år. Kvar periode vert $(10/n)\%$ lagt til lånet. Det svarer til ein vekstfaktor på

$$1 + \frac{0{,}1}{n}.$$

I løpet av året gongar me med vekstfaktoren n gongar, slik at den samla vekstfaktoren vert

$$v(n) = \left(1 + \frac{0{,}1}{n}\right)^n.$$

Lat oss sjå på nokre verdiar av n og rekna ut med kalkulator.

Frekvens	n	$v(n)$
Årleg	1	1,1
Månadleg	12	1,104 713
Vekentleg	52	1,105 065
Dagleg	365	1,105 156
Kvar time	8760	1,105 170
Kvart minutt	525 600	1,105 171
Kvart sekund	31 536 000	1,105 171

Øvingsoppgåve 4.20. Sjå på eit fond som veks med 100% nominell rente per år, og samanlikna ulike renteperiodar. Kva er den høgaste årlege vekstfaktoren du finn ved å forrenta *uendeleg* ofte?

Løysing 4.7 (Utfylling)**.** Me har n renteperiodar per år, og kvar gong legg med til $(100/n)\%$ eller $1/n$ på lånet. Det svarer til ein vekstfaktor på

$$1 + \frac{1}{n},$$

Når me gangar med den same vekstfaktoren n gongar, ver den samla vekstfaktoren

$$v(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Fyll inn resten av tabellen med verdiar for $v(n)$

Frekvens	n	$v(n)$
Årleg	1	2
Månadleg	12	
Vekentleg	52	
Dagleg	365	
Kvar time	8760	
Kvart minutt	525 600	
Kvart sekund	31 536 000	2,718 28

Merknad 4.2. Talet som me nærmar oss i løysinga over, har fått namnet e, og $e \approx 2{,}718\,28$. Formelt definerer me e slik at når $n \to \infty$ (når n går mot uendeleg), so vil

$$v(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e,$$

dvs. går $v(n)$ mot e. I løysinga over har me funne korrekt verdi for e med fem desimalar.

Øvingsoppgåve 4.21. Sjå på eit fond som veks med 20% nominell rente per år, og samanlikna ulike renteperiodar. Kva er den høgaste årlege vekstfaktoren du finn ved å forrenta *uendeleg* ofte?

Øvingsoppgåve 4.22. Aksjefondet *Bravur* har gått so det suser, med ei verdiauke på 250% per år. Tenk deg ulike periodiseringar av verdiauka. Kva er den høgaste årlege vekstfaktoren du finn ved å forrenta *uendeleg* ofte?

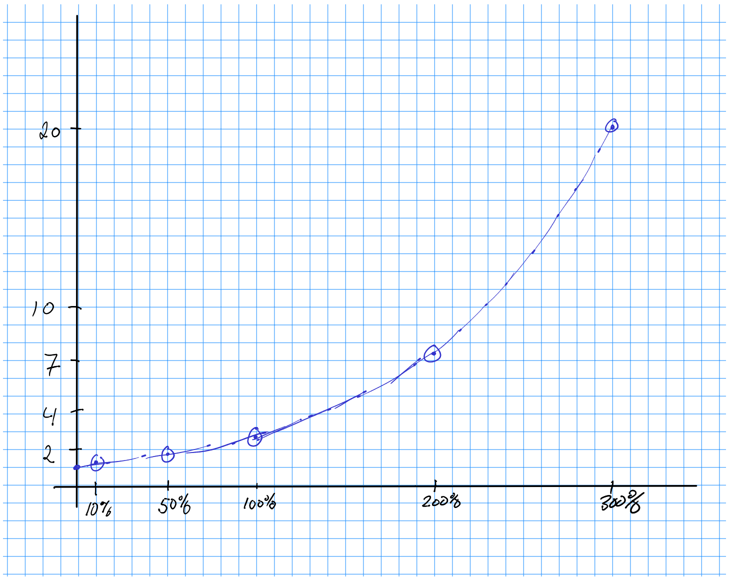
Merknad 4.3. Det som me har kalt «forrenting uendeleg ofte» i oppgåvene over, vert kalla *kontinuerleg forrenting* i fagspråket.

Eksempeloppgåve 4.23. Ved å gjenta oppgåvene over, kan me finna omtrentleg årleg vekstfaktor ved koninuerleg forrenting for ulike rentesatsar.

Rentesats	Vekstfaktor
300%	20,086
200%	7,389
100%	$e \approx 2{,}718$
50%	1,649
10%	1,105
0%	1

Plott samanhengen mellom rentesats og vekstfaktor. Korleis vil du beskriva denne samanhengen?

Løysing 4.8. Me kan teikna plottet for hand, og få:



Denne kurva liknar på eksponentialfunksjonane som me har plotta i oppgåve 4.4. Dette ville ha vore enno tidlegare om me hadde teke med punkt for 400% og større. Det er likevel naturleg å gissa på at vekstfaktoren er lik e^r der r er rentesatsen.

Øvingsoppgåve 4.24. I løysinga fremja me ein hypotese, om at årleg vekstfaktor v ved kontinuerleg forrenting med rentesats r, er gjeven som $v = e^r$. Sjekk om denne samanhengen gjeld for dei vekstfaktorane som er rekna ut i oppgåve 4.23.

Løysing 4.9 (Utfylling).

Rentesats	Vekstfaktor	r	$v = e^r$	Lik
300%	20,086	3	20,086	Ja
200%	7,389		7,389	
100%	$e \approx 2{,}718$			
50%	1,649	0,5		
10%	1,105			
0%	1			

Finn du noko tilfelle der $v = e^r$ ikkje er lik vekstfaktoren?

Merknad 4.4. Me legg merke til at me kan rekna ut potensen e^r utan at r er eit heiltal, i alle fall når me bruker kalkulator. Funksjonen a^x er pen og glatt for alle ikkje-negative verdiar av a og alle verdiar av x.

Øvingsoppgåve 4.25. Sjekk om $v = e^r$ er riktig vekstfaktor for problema som du løyste i oppgåve 4.21 og 4.22.

Merknad 4.5. Når me har kontinuerleg forrenting med rentesats r, so er samla årleg vekstfaktor lik e^r.

Eksempeloppgåve 4.26. Ei investering på ein million kroner veks med kontinuerleg forrenting og rentesats 10% i fem år. Kva er saldoen på slutten av kvart år i perioden?

Løysing 4.10. Lat oss setja det opp som ein tabell år for år. Vekstfaktoren er $e^{0,1}$. Tala er i millionar kroner.

År	Saldo
1	$1 \cdot e^{0,1} = 1{,}105$
2	$1 \cdot \left(e^{0,1}\right)^2 = 1{,}221$
3	$1 \cdot \left(e^{0,1}\right)^3 = 1{,}350$
4	$1 \cdot \left(e^{0,1}\right)^4 = 1{,}492$
5	$1 \cdot \left(e^{0,1}\right)^5 = 1{,}649$

Øvingsoppgåve 4.27. Ei investering på 5000 kroner veks med kontinuerleg forrenting og rentesats 20% i fem år. Kva er saldoen på slutten av kvart år i perioden?

Merknad 4.6. Merk at e^r er den årlege vekstfaktoren ved kontinuerleg forrenting, og når fleire år går, gangar me (som vanleg) med same vekstfaktor for kvart år.

Øvingsoppgåve 4.28. Ei investering på 5000 kroner veks med kontinuerleg forrenting og rentesats 20%. Kva er saldoen etter $2\frac{1}{2}$ år?

Merknad 4.7. Over har me funne ein formel for kontinuerleg forrenting. Når ein startkapital K_0 veks med kontinuerleg forrenting med rentesats r, er kapitalen etter t år gjeven som

$$K(t) = K_0 \cdot \left(e^r\right)^t.$$

Dette kan forenklast som

$$K(t) = K_0 \cdot e^{rt}.$$

Dette fylgjer av potensreglane, men dei lyt ein slå opp andre plassar.

4.6 Noverdi

Til øvingstimen 6 (9. september 2019)**.** Denne økta skal de prioritera oppgåvene i fylgjande orden:

1. Avsnitt 4.4 om de ikkje rakk det forrige økt.
2. Avsnitt 4.6 (dette avsnittet). Dette er heilt kritisk for neste kapittel. Nokon rakk det kanskje forrige økt.
3. Avsnitt 4.8. Dette gjev eit breidare perspektiv på sentrale idéar. Det einaste som er nytt er at døma kjem frå andre felt enn økonomi og finans.

4. Avsnitt 4.5 og 4.7. Kjernepensum, men seinare stoff byggjer ikkje på det.
5. Læreboka, oppg. 1.8, 1.15(a-d), 1.35, 4.1, 4.2, (4.7)

Eksempeloppgåve 4.29. Du skal halda brudlaup i januar 2020, og treng 50 000 kr. til festen då. Du set av pengar til festen allereie i desember 2018, slik at dei står på konto i eitt år til 2,5% rente. Kor mykje må du setja inn?

Løysing 4.11. Som vanleg kan me setja opp ein modell som viser samanhengen mellom pengar no, og pengane når me skal bruka dei. Lat oss skriva S_0 for summen me set inn i desember 2018, og S_1 for saldoen me kan ta ut i januar 2020.

Me har to opplysingar som me kan bruka i modellen. For det fyrste er S_1 lik S_0 pluss rentene, dvs.

$$S_1 = S_0 \cdot 1{,}025.$$

For det andre er $S_1 = 50\,000$. Det er nok informasjon til ei likning med ein ukjend:

$$50\,000 = S_0 \cdot 1{,}025.$$

Her løyser me ved å dela på 1,025, og me får

$$\frac{50\,000}{1{,}025} = S_0.$$

Reknar me ut brøken på kalkulator, får me at me må setja inn er 48 780,49 kr.

Øvingsoppgåve 4.30. Du skal arrangera ein stor festival om eitt år og treng ein million kroner til arrangementet. Du samlar inn pengar eit år på førehand og set dei på konto til 3% rente. Kor mykje må du setja inn? (Me føreset at perioden går nyttår til nyttår, slik at du får alle rentene med i utbetalinga.)

Definisjon 4.3. Dei to siste oppgåvene spør etter det som me kaller *noverdi.* Den summen du må setja av no, for å få eit visst beløp på eit visst tidspunkt i framtida med renter, er *noverdien* til beløpet. Når me reknar ut noverdien, taler me gjerne om *diskontering*, og rentesatsen vert gjerne *diskonteringsrente.* Vekstfaktoren $\frac{1}{1+r}$ kan me kalla *diskonteringsfaktoren.*

Når me reknar om frå framtidsverdi til noverdi, seier me at me *diskonterer*.

Eksempeloppgåve 4.31. Du planlegg eit innovasjonsprosjekt, som er venta å resultere i eit patent med ein marknadsverdi på 100 millionar kroner om fem år. Kva er noverdien til eit slikt patent når diskonteringsrenta er 4%?

Løysing 4.12. Som før kan me tenkja oss at noverdien S_0 står til forrenting (i banken) i fem år til 4% rente. Den framtidige verdien er $S_5 = 100$ mNOK. Me har altso

$$S_5 = 100 \quad \text{og} \quad S_5 = S_0 \cdot 1{,}04^5,$$

eller

$$100 = S_0 \cdot 1{,}04^5.$$

Ved å dela på båe sider, får me
$$\frac{100}{1{,}04^5} = S_0.$$
Me kalkulatoren $S_0 = 82{,}19$. Noverdien er altso 82,19 millionar kroner.

Øvingsoppgåve 4.32. Martin er 47 år og vil teikna ei livforsikring som skal gje han ei eingongsutbetaling 500 000 kr. når han er 67 år. Diskonteringsrenta er 4%. Kva er noverdien på denne eingongsutbetalinga?

4.7 Kontinuerleg diskontering

Øvingsoppgåve 4.33. På same måte som me kan forrenta fleire gongar per år, kan me diskontera fleire gongar per år. Ta utgangspunkt i ein diskonteringsrente på 10% per år. Rekn ut kva den samla diskonteringsfaktoren over eit år vert dersom du diskonterer kvar månad, veke, dag, osv. Rekn òg ut vekstfaktoren for noverdien.

Løysing 4.13 (Utfylling)**.** Sei at me har n diskonteringsperiodar per år. Kvar periode har ein diskonteringsfaktor på
$$\big(1 + \frac{0{,}1}{n}\big).$$
Samla over året vert diskonteringsfaktoren
$$d(n) = \big(1 + \frac{0{,}1}{n}\big)^n.$$
Noverdien av eit beløp K utbetalt om eit år, er då
$$K_0 = K \cdot \frac{1}{d(n)},$$
dvs. vekstfaktoren er $v(n) = \frac{1}{d(n)}$.

Frekvens	n	$d(n)$	$v(n)$
Årleg	1	1,1	$\frac{1}{1{,}1} = 0{,}9091$
Månadleg	12	$\big(1 + \frac{0{,}1}{12}\big)^{12} = \cdots$	$1/1{,}1047 = \cdots$
Vekentleg	52		
Dagleg	365		
Kvar time	8760		
Kvart minutt	525 600		
Kvart sekund	31 536 000		

Merknad 4.8. På same måte som vekstfaktoren ved kontinuerleg forrenting og rentesats r er e^r, er diskonteringsfaktoren ved kontinuerleg diskontering og diskonteringsrente r òg e^r. Noverdien av eit beløp K om t år er då
$$K_0 = K \cdot \frac{1}{e^{rt}}.$$

4.8 Andre modellar med eksponentialfunksjonar

Eksempeloppgåve 4.34. Ein bakteriekultur med ein viss type bakteriar doblar massen sin kvar sjette time. Massen på starttidspunktet er éin gram. Gjev eit funksjonsuttrykk for massen etter t timar.

Løysing 4.14. Ein periode her er på seks timar. I løpet av t timar skjer doblinga $t/6$ gongar. Dobling tyder ein vekstfaktor på 2. Etter t timar ($t/6$ periodar) er dermed massen lik $m(t) = 1 \cdot 2^{t/6}$.

Øvingsoppgåve 4.35. Sjå igjen på bakteriekulturen i oppgåve 4.34.

1. Kor stor er massen etter eitt døger (24 timar)?
2. Kor stor er massen etter éin time?

Øvingsoppgåve 4.36. Det radioaktive stoffet radon-222 har ei halveringstid på 3,82 dagar. Dvs. at dersom du startar med m_0 kg radon-222, har du $m_0/2$ kg att etter 3,82 dagar. Skriv eit funksjonsuttrykk for massen $m(t)$ med radon-222 som du har att etter t dagar.

Øvingsoppgåve 4.37. Radon-222 har som sagt ei halveringstid på 3,82 dagar. Du hadde ein kg radon-222 for 24 timar sidan. Kor mykje har du no?

Øvingsoppgåve 4.38. Kalium-42 har ei halveringstid på 12 timar. Kor lang tid går det før ein kilo kalium-42 er redusert til ein gram (0,001 kg)?

4.9 Logaritmar

Til øvingstimen 7 (11. september 2019)**.** Denne økta bør de gjera alle oppgåvene i dette avsnittet.

Deretter kan de gjera fylgjande oppgåver i læreboka: 4.13, 4.16, 4.18 (Evt. kan de gå tilbake å gjera oppgåver som de ikkje rakk over forrige økt.)

Eksempeloppgåve 4.39. Ola set 100kr. i banken til 2% rente p.a. (per år). Kor mange år tek det før saldoen er fordobla?

Løysing 4.15. Me veit at saldoen hans Ola etter t år er

$$S(t) = 100 \cdot 1{,}02^t. \tag{4.1}$$

Me har brukt den same modellen i fleire oppgåvetypar. Det nye er at det er t som er ukjend, medan saldoen både før og etter perioden er kjend.

Lat oss no definera t som tida det tek å dobla saldoen, dermed har me

$$S(t) = 2 \cdot 100 = 200. \tag{4.2}$$

Rekneregel 4.1 Logaritma av ein potens

$$\ln a^x = x \ln a$$

Dei to likningane (4.1) og (4.2) gjev to uttrykk for den same storleiken $S(t)$, og me kan setja dei saman i ei likning:

$$100 \cdot 1{,}02^t = 200. \tag{4.3}$$

Likninga må forenklast, og me gjer dei enklaste forenklingane fyrst. Me kan dela båe sidene på 100, og få

$$\frac{100 \cdot 1{,}02^t}{100} = \frac{200}{100}.$$

eller

$$1{,}02^t = 2.$$

No har me eksponentialfunksjonen aleine på venstre side. For å forenkla ytterlegare, treng me ein ny funksjon, *logaritmefunksjonen* ln. Me skal koma tilbake til eigenskapene som logaritma har sidan, men me kan bruka ln her vha. ein enkel regel og kalkulator.

Me kan skriva

$$\ln 1{,}02^t = \ln 2.$$

Når me bruker same funksjon på båe sidene i ei likning, må likskapen framleis halda. No bruker me logaritmeregelen (rekneregel 4.1) for å setja t-en utanfor, slik at

$$t \ln 1{,}02 = \ln 2.$$

Ved å dela på båe sidene, kan me få t-en aleine

$$t = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}02}.$$

Logaritmefunksjonen finn du på kalkulatoren, og me kan rekna ut og få

$$t \approx \frac{0{,}693}{0{,}0198} \approx 35{,}003.$$

Sidan Ola berre får renter éin gong i året, bør svaret vera eit heiltall. Her fekk me so vidt over 35 år. Dvs. at saldoen er *nesten* dobla etter 35 år. Fyrst etter 36 år er saldoen passert 200kr., og rett svar når me ser på det praktiske problemet bør difor vera 36 år. I den matematiske modellen er tilnærma 35 år rett svar, men det er altso litt upresist i røynda.

Øvingsoppgåve 4.40. Kari har ein konto med 3% rente. Ho set inn 400 kr. Kor mange år tek det før saldoen er 1000 kr?

Øvingsoppgåve 4.41. Filip set inn eit beløp på konto til 2% rente. Kor lang tid tek det før beløpet er fordobla? Speler det noka rolle kor stort startbeløpet er?

Øvingsoppgåve 4.42. Karl tek opp eit lån på 2000 kr. til 3% rente p.a. Renta vert lagt til kvartalsvis (kvar tredje månad). Kor lang tid tek det før lånesaldoen er 3000kr.?

Eksempeloppgåve 4.43. Oveig har investert $\frac{1}{2}$ million kroner, men taper 5% i året. Kor lang tid tek det før formuen er halvert?

Løysing 4.16. Me løyser dette på same måte som oppgåve 4.39, bortsett frå at vekstfaktoren er mindre enn éin.

Tap på 5% gjev ein vekstfaktor på 0,95. Saldoen (i millionar) etter t år er dermed

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}95^t. \tag{4.4}$$

Me er interessert i tida t når formuen er halvert, dvs. til ein kvart million. Då har me

$$S(t) = \frac{1}{4}. \tag{4.5}$$

Dei to likningane (4.4) og (4.5) gjev to uttrykk for den same storleiken $S(t)$, og me kan setja dei saman i ei likning:

$$\frac{1}{2} \cdot 0{,}95^t = \frac{1}{4}, \tag{4.6}$$

eller

$$0{,}95^t = \frac{1}{2}, \tag{4.7}$$

Når me tek logaritmen, får me

$$\log 0{,}95^t = \log \frac{1}{2}, \tag{4.8}$$

eller

$$t \cdot \log 0{,}95 = -\log 2. \tag{4.9}$$

Tida som går er altso

$$t = \frac{-\log 2}{\log 0{,}95} = 13{,}51. \tag{4.10}$$

Det er ikkje klart frå oppgåva kor ofte ny saldo vert bokførd, so det er ikkje klart kor mykje me bør runda av. Me kan godt skriva at formuen er halvert etter om lag $13\frac{1}{2}$ år.

Øvingsoppgåve 4.44. Amalie har investert ein million kroner og taper 10% i året. Kor lang tid tek det før formuen er halvert?

Øvingsoppgåve 4.45. Prisen på PCar fell med 2% i året. Dersom dette held fram, kor lang tid går det før prisen er redusert med 20%?

4.10 Vidare lesing

Stoffet i dette kapittelet er dekt i Bjørnestad *et al.* kapittel 4.1–4.4, men då i ei meir omfattande og abstrakt framstilling. Me skal koma tilbake til eksponential- og algoritmefunksjonen seinare i kurset, og lærebokframstillinga kan venta til då.

5 Finansmatematikk

Til øvingstimen 8 (16. september 2019)**.** I dag er det berre å ta fatt på dette kapittelet og arbeida so langt som de kjem. Me held fram neste øvingstime.

Nokon bør kanskje hoppa over 5.1-5.2 dersom de kjenst trivielt. Dei to avsnitta er med som ei myk inngang til resten av kapittelet.

Til øvingstimen 9 (18. september 2019)**.** Her bør det fortsetja der de slapp på onsdag. Alle bør koma gjennom Avsnitt 5.3–5.8 som minimum og helst heile kapittelet.

Deretter kan de jobba med

1. Kapittel 5.1–5.4 i læreboka. Dette gjev ei matematisk innføring i rekneteknikkane som vert brukte i øvingsheftet.

2. I Kapittel 5.5 kan ein finna fleire oppgåver av same type som i øvingsheftet.

5.1 Fast sparebeløp

Eksempeloppgåve 5.1 (Fast sparebeløp)**.** Ola har ein sparekonto med 3% rente. Han set inn 1000 kr. kvart år i seks år. Kor stor er saldoen når han har sett inn det sjette beløpet?

Løysing 5.1 (Fyrste forsøk)**.** Me kan setja utrekninga opp i ein tabell.

År	Gamal saldo	Rente	Innskot	Ny saldo
1	0 kr.	0 kr.	1000 kr.	1000 kr.
2	1000 kr.	30 kr.	1000 kr.	2030 kr.
3	2030 kr.	60,90 kr.	1000 kr.	3090,90 kr.
4	3090,90 kr.	92,73 kr.	1000 kr.	4183,63 kr.
5	4183,63 kr.	125,51 kr.	1000 kr.	5309,14 kr.
6	5309,14 kr.	159,27 kr.	1000 kr.	6468,41 kr.

Kvart år har me rekna ut ny saldo som summen av gamal saldo, rentene på gamal saldo, og det nye innskotet (alltid 1000 kr.).

Løysing 5.2 (Alternativ løysing)**.** I det fyrste forsøket rekna me ut saldoen år for år, ei tabelline per år. Alternativt kan me ta for oss kvart av dei seks sparebeløpa for seg, og rekna ut kor mykje kvart beløp er verd på slutten med renter. Det fyrste beløpet står i fem år, og får renter fem gongar. Dei andre beløpa får mindre renter, det siste ingen renter i det heile. Då ser tabellen slik ut:

Beløp nr.	Tid på konto	Verdi ved slutten av perioden
1	5 år	$1000 \cdot 1{,}03^5 = 1159{,}27$
2	4 år	$1000 \cdot 1{,}03^4 = 1125{,}51$
3	3 år	$1000 \cdot 1{,}03^3 = 1092{,}73$
4	2 år	$1000 \cdot 1{,}03^2 = 1060{,}90$
5	1 år	$1000 \cdot 1{,}03^1 = 1030$
6	0 år	$1000 \cdot 1{,}03^0 = 1000$
Total	—	6468,41

Øvingsoppgåve 5.2. Kari har 4% rente på sparekontoen sin og sparer 100kr. kvart år i fem år. Kor mykje står på kontoen hennar når ho har sett inn det femte beløpet? Løys helst oppgåva på to måtar og sjekk at du får same svar.

5.2 Summeteiknet

Merknad 5.1. Me vil få nytte av meir kompakt, matematisk notasjon for tabellen i den alternative løysinga over. Skriv S_6 for saldoen etter seks år. Tabellen viser at S_6 er summen av seks ledd på formen $1000 \cdot 1{,}03^i$ for ulike verdiar av i. Matematisk skriv me

$$S_6 = 1000 + 1000 \cdot 1{,}03^1 + 1000 \cdot 1{,}03^2 + 1000 \cdot 1{,}03^3 + 1000 \cdot 1{,}03^4 + 1000 \cdot 1{,}03^5$$

eller

$$S_6 = \sum_{i=0}^{5} (1000 \cdot 1{,}03^i).$$

Me kan setja utanfor parentes, slik:

$$S_6 = 1000 \cdot (1 + 1{,}03^1 + 1{,}03^2 + 1{,}03^3 + 1{,}03^4 + 1{,}03^5)$$

eller slik

$$S_6 = 1000 \cdot \left(\sum_{i=0}^{5} 1{,}03^i \right).$$

Ein slik sum, der alle ledda har formen $a \cdot b^i$ for ulike verdiar av i, kaller me for ei *geometrisk rekkje.*

Merknad 5.2. Teiknet $\sum$ er den greske bokstaven stor sigma, men me kaller det gjerne for summeteikn når det er brukt som i merknaden over.

Eksempeloppgåve 5.3. Skriv fylgjande sum med summeteikn:

$$x^2 + x^4 + x^6 + x^8$$

Løysing 5.3. Her er det eksponenten som varierer frå ledd til ledd. Alle er partal, som kan skrivast som $2i$, der i går frå 1 til 4. Då kan me skriva summen som

$$\sum_{i=1}^{4} x^{2i}.$$

Øvingsoppgåve 5.4. Skriv fylgjande sum med summeteikn:

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5$$

Øvingsoppgåve 5.5. Skriv fylgjande sum ut med eksplisitte ledd og plussteikn:

$$\sum_{i=1}^{5} i.$$

Eksempeloppgåve 5.6. Ofte har me summar med svært mange ledd, t.d.

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 100a_{100}.$$

Skriv summen med summeteikn.

Løysing 5.4. Ellipsen $(\cdots)$ indikerer manglande ledd. Der er ingen formelle regler som seier kva ledd som manglar. Me må sjå på mynsteret i dei ledda som finst, og litt sunt bondevett, og dei fleste vil då tenkja at der skal vera 100 ledd på formen $i \cdot a_i$. Med summeteikn skriv me:

$$\sum_{i=1}^{100} i \cdot a_i.$$

Øvingsoppgåve 5.7. Skriv fylgjande sum med summeteikn:

$$x^2 + x^3 + x^4 + \cdots x^{50}.$$

Merknad 5.3. Me skreiv parentesene i Merknad 5.1 av pedagogiske grunnar, for å unngå tvetyding og gjera operasjonane lettare gjenkjennelege. Dei er ikkje naudsynte, og det er korrekt å skriva

$$\begin{aligned} S_6 &= \sum_{i=0}^{5} 1000 \cdot 1{,}03^i \\ &= 1000 \cdot \sum_{i=0}^{5} 1{,}03^i. \end{aligned} \tag{5.1}$$

5.3 Annuitetar

Eksempeloppgåve 5.8 (Fast sparing over lang tid)**.** Ola har ein sparekonto med 3% rente. Han set inn 1000 kr. kvart år i tredve år. Kor stor er saldoen når han har sett inn det tredvte beløpet?

Rekneregel 5.1 Geometrisk rekkje

$$\sum_{i=0}^{n-1} x^i = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

Løysing 5.5. Oppgåva er identisk med oppgåve 5.1 bortsett frå at perioden er lenger. Me har tredve sparebeløp som får renter fleire eller færre gongar. Det fyrste får rente 29 gongar, og det siste ingen gongar. Dette gjev ein sum med tredve ledd:

$$\begin{aligned} S_{30} &= \sum_{i=0}^{29} 1000 \cdot 1{,}03^i \\ &= 1000 \cdot \sum_{i=0}^{29} 1{,}03^i. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Merk at i går frå 0 t.o.m. 29, det gjev 30 ledd.

Me kan setja dette opp i ein tabell som då me hadde seks periodar, men det er mykje arbeid. I staden skal me bruka rekneregel 5.1, der $x = 1{,}03$ er vekstfaktoren og $n = 30$ er talet på periodar. Me skriv

$$\begin{aligned} S_{30} &= 1000 \cdot \sum_{i=0}^{29} 1{,}03^i \\ &= 1000 \cdot \frac{1{,}03^{30} - 1}{1{,}03 - 1} \\ &= 1000 \cdot \frac{1{,}03^{30} - 1}{0{,}03} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Siste steg kan me rekna ut på kalkulator:

$$S_{30} \approx 1000 \cdot 47{,}575\,415\,7 \approx 47\,575{,}42.$$

Øvingsoppgåve 5.9. Gjenta oppgåve 5.2 men bruk formelen for ei geometrisk rekkje som over. Får du same svar som før?

Øvingsoppgåve 5.10. Kari har 4% rente på sparekontoen sin og sparer 100 kr kvart år i 35 år. Kor mykje står på kontoen hennar når ho har sett inn det 35. beløpet?

Eksempeloppgåve 5.11. Pelle har spart 2000 kr i året sidan år 2000. Han satte inn det fyrste beløpet 1. januar 2000 og det siste beløpet 1. januar 2017. Rentesatsen er 2,5%. Kor mykje pengar har han på konto når han har fått rentene ved utgangen av 2017?

Løysing 5.6 (Beint fram med lange summar)**.** Her har Pelle spart i 18 år, og me tek med rentene for det attande året i summen. Dermed har det fyrste sparebeløpet fått renter for 18 år, og det attande og siste beløpet har fått renter for eitt år.

Saldoen som me skal fram til er dermed

$$S_{18} = 2000 \cdot 1{,}025^{18} + 2000 \cdot 1{,}025^{17} + \ldots + 2000 \cdot 1{,}025^{2} + 2000 \cdot 1{,}025^{1}.$$

Det er greitt å setja felles faktorar utanfor parentes, slik at 1 vert det siste leddet i summen; slik

$$S_{18} = 2000 \cdot 1{,}025 \cdot \left(1{,}025^{17} + 1{,}025^{16} + \ldots + 1{,}025^{2} + 1{,}025^{1} + 1{,}025^{0}\right).$$

Skriv me dette med summeteikn får me

$$S_{18} = 2000 \cdot 1{,}025 \cdot \sum_{i=0}^{17} 1{,}025^{i}.$$

No kan me lett bruka formelen, og skriva

$$S_{18} = 2000 \cdot 1{,}025 \cdot \frac{1{,}025^{18} - 1}{1{,}025 - 1}.$$

Når me reknar ut, gjerne med kalkulator, får me

$$S_{18} = 2050 \cdot 22{,}386 = 45\,892{,}01.$$

Saldoen ved utgangen av 2017 er altså 45 892,01 kr.

Løysing 5.7 (Med summeteikn). Her har Pelle spart i 18 år, og me tek med rentene for det attande året i summen. Dermed har det fyrste sparebeløpet fått renter for 18 år, og det attande og siste beløpet har fått renter for eitt år.

Saldoen som me skal fram til er dermed

$$S_{18} = 2000 \cdot \sum_{j=1}^{18} 1{,}025^{j}.$$

Merk at summen startar med $j = 1$, og ikkje $i = 0$ som i formelen. Me må difor skriva om summen slik at han startar med $i = 0$.

Me kan skilja ut éin faktor frå potensen, slik

$$S_{18} = 2000 \cdot \sum_{j=1}^{18} 1{,}025 \cdot 1{,}025^{j-1} = 2000 \cdot 1{,}025 \cdot \sum_{j=1}^{18} 1{,}025^{j-1}.$$

Eksponenten $j - 1$ startar no på 0 (for $j = 1$). Lat oss setja $i = j - 1$; då får me

$$S_{18} = 2000 \cdot 1{,}025 \cdot \sum_{i=0}^{17} 1{,}025^{i},$$

og me kan bruka formelen, som gjev

$$S_{18} = 2000 \cdot 1{,}025 \cdot \frac{1{,}025^{18} - 1}{1{,}025 - 1}.$$

Når me reknar ut, gjerne med kalkulator, får me

$$S_{18} = 2050 \cdot 22{,}386 = 45\,892{,}01.$$

Saldoen ved utgangen av 2017 er altså 45 892,01 kr.

Merknad 5.4. Merk at resonnementet er det same i båe løysingsforslaga. Det er berre notasjonen som skil dei.

Øvingsoppgåve 5.12. Ingeborg skal spara til pensjon. Ho sparer 10 000 kr per år, med det fyrste beløpet 1. januar 1995 og det siste beløpet 1. januar 2018. Rentesatsen er 4%. Kor mykje pengar har ho på kontoen ved utgangen av 2018, inklusive renter for 2018?

5.4 Sparemål

Eksempeloppgåve 5.13. Håkon sparer 1000 kr i året og får 5% rente. Kor mange år går det før han har spart opp 20 000 kr med renter?

Løysing 5.8. Her kjenner me saldoen på slutten, i tillegg til rentesatsen og sparebeløpet. Det me ikkje kjenner er kor lenge Håkon må spare. Lat oss skriva n for talet på sparebeløp. Legg merke til at det går $n-1$ år frå fyrste til siste sparebeløp.

Saldoen etter n sparebeløp er en sum med n ledd, slik

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} 1000 \cdot 1{,}05^i \\ &= 1000 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 1{,}05^i. \end{aligned}$$

Sidan me kjenner sparemålet, $S_n = 20000$, kan me skriva dette som

$$20\,000 = 1000 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 1{,}05^i.$$

Me kan dela på 1000 med ein gong

$$20 = \sum_{i=0}^{n-1} 1{,}05^i.$$

Høgre side kan forenklast med regelen for geometriske rekkjer

$$20 = \frac{1{,}05^n - 1}{1{,}05 - 1} = \frac{1{,}05^n - 1}{0{,}05}.$$

Dersom me gongar med 0,05 på båe sider, får me

$$1 = 1{,}05^n - 1,$$

og til slutt kan me leggja til 1, og få

$$2 = 1{,}05^n.$$

Når potensen står aleine, kan me bruka logaritmefunksjonen igjen, på same måte som i kapittel 4.9,

$$\ln 2 = \ln 1{,}05^n = n \cdot \ln 1{,}05.$$

Til slutt kan me dela gjennom for å løysa for n:

$$n = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx 14{,}2.$$

Håkon passerer altso 20 000 når han set inn det 15. sparebeløpet, 14 år etter at han starta å spara.

Øvingsoppgåve 5.14. Margrete sparer 500 kr i året og får 10% rente. Kor mange år går det før ho har spart opp 15 000 kr med renter?

Eksempeloppgåve 5.15. Nils er 37 år og planlegg pensjonen sin. Han meiner at han treng ein ekstra pensjonsformue på 3 000 000 kr når han er 67 år. Rentenivået er 4%. Kor mykje må han spara per år for å nå sparemålet sitt?

Løysing 5.9. Oppgåva gjev eit lite tolkingsrom i når han set inn det fyrste beløpet og når han tek ut det siste. For å unngå utfordringa med renter på innskot gjort midt på året, so går me ut frå at han alltid set inn sparebeløpet 31. desember. Dersom han startar når han er 37, so vil han vera 66 år når han set inn det 30. beløpet. Dei pengane er klar den dagen han fyller 67 år, utan at han har fått renter på det siste innskotet.

Denne gongen veit me kor mange periodar han sparer og kva han skal ha på slutten. Det er sparebeløpet me må finna, lat oss kalla det x. Me kan setja opp likninga som me har gjort før

$$S_n = x \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 1{,}04^i,$$

eller

$$\begin{aligned} 3\,000\,000 &= x \cdot \sum_{i=0}^{29} 1{,}04^i \\ &= x \cdot \frac{1{,}04^{30} - 1}{1{,}04 - 1}. \\ &= x \cdot \frac{1{,}04^{30} - 1}{0{,}04}. \end{aligned}$$

Lat oss snu likninga, og få x på venstre side:

$$x \cdot \frac{1{,}04^{30} - 1}{0{,}04} = 3\,000\,000$$

So flyttar me over, fyrst nemnaren i brøken:

$$x \cdot (1{,}04^{30} - 1) = 3\,000\,000 \cdot 0{,}04 = 120\,000.$$

Og so kan me dela på båe sidene:

$$x = \frac{120\,000}{1{,}04^{30} - 1} \approx 53\,490{,}30$$

Han må altso spara 53 490,30 kr i året.

Øvingsoppgåve 5.16. Per og Kari drøymer om ei jordomseiling, og dei tenkjer å spara over fem år, for livets store tur. Dei legg eit budsjett på 200 000 kroner. Rentenivået er 3%. Kor mykje må dei spara per år for å ha råd til turen?

5.5 Noverdi

Eksempeloppgåve 5.17. Fredrik går av med pensjon, og må velja korleis han vil ha pensjonen utbetalt. Han ynskjer å bruka ein del av saldoen for å få ein årleg utbetaling på 100 000 kr per år i ti år. Ein slik utbetalingsplan vert gjerne kalla ein *annuitet*, og prisen er gjeve som samanlagd noverdi for alle utbetalingane. Rentenivået er 5%. Han får den fyrste utbetalinga umiddelbart og ti utbetalingar totalt. Kor mykje må han betala for annuiteten?

Løysing 5.10. Noverdien er ein sum av ti utbetalingar, der den siste er diskontert (sjå definisjon 4.3) ni gongar og den fyrste null gongar, dvs.

$$V = \sum_{i=0}^{9} 100\,000 \cdot \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^i = 100\,000 \cdot \sum_{i=0}^{9} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^i.$$

Rekneregelen gjev

$$V = 100\,000 \cdot \frac{\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{1{,}05} - 1} = 100\,000 \cdot \frac{-0{,}3860}{-0{,}047\,619} = 810\,782{,}17.$$

Han må betala 810 782,17 kr for annuiteten.

Merknad 5.5. Ein slik årleg utbetaling vert ofte kalla ein *annuitet* (av latin *anno* for år). Ordet vert brukt i mange samanhengar i finans, der faste, periodiske beløp vert betalt.

Øvingsoppgåve 5.18. Felicia går av med pensjon og skal kjøpa ein annuitet som gjev 100 000 kr per år i tolv år. Rentenivået er 4%. Kor mykje må ho betala for annuiteten når den fyrste utbetalinga kjem umiddelbart?

Øvingsoppgåve 5.19. Sjå annuiteten til Felicia igjen (oppg. 5.18). Ho vil heller at utbetalinga startar om eitt år, og ikkje umiddelbart. Ho skal stadige ha tolv årlege utbetalingar på 100 000 kr kvar, med rentenivå på 4%.

1. Tenk over før du reknar: Må ho betala meir eller mindre for annuiteten?
2. Rekn ut kor mykje ho må betala.
3. Reflektér: Stemmer rekninga med det du tenkte på førehand?

Øvingsoppgåve 5.20. Annanias vil bruka heile pensjonsformuen sin på årlege utbetalingar på 100 000 kroner. Han startar med ein pensjonsformue på 1 000 000 kroner og ein rentesats på 4,8%. I kor mange år kan han få ein utbetaling på 100 000 kroner før formuen er brukt opp?

Løysing 5.11 (Utfylling)**.** Oppgåva seier ikkje om utbetalinga startar umiddelbart eller om eit år, so her står me fritt til å tolka. Løysinga er enklast om utbetalinga startar umiddelbart, so me går ut frå det.

Han skal ha ein annuitet over t år, for so stor t som råd.

1. Sett opp eit uttrykk for noverdien av annuiteten over t år.
2. Kor mange år kan ho betala for når han har 1 000 000 kroner å kjøpa for (i noverdi)?
3. Drøft: skal me runda svaret over opp eller ned?

Øvingsoppgåve 5.21. Elias vil òg bruka heile pensjonsformuen sin på årlege utbetalingar. Han har ein formue på 2 500 000 kroner og ein rentesats på 4,5%. Han vil ha ei årleg utbetaling på 120 000 kroner. I kor mange år har han råd til å få denne annuiteten?

Øvingsoppgåve 5.22. Elias vurderer månadlege utbelingar på 10 000 kroner i staden for årleg utbetaling. Formuen og rentesatsen er elles som i oppgåva over. I kor mange år og månader har han råd til å få denne annuiteten?

5.6 Annuitetslån

Eksempeloppgåve 5.23. Jenny kjøper moped og låner 50 000 kroner i banken til 8% rente per år. Ho får eit annuitetslån, slik at ho betaler eit fast årleg beløp (annuitet) på 10 000 kr som dekkjer renter og avdrag. Kor mykje av lånet gjenstår etter fem år?

Løysing 5.12 (Med tabell)**.** Den mest oversiktlege måten å rekna ut dette på, er å setja opp ein tabell med lånesaldoen år for år.

År	Saldo inn	Med renter	Etter innbetaling
1	50 000	$\times$1,08 $\to$ 54 000	$-$10 000 $\to$ 44 000
2	44 000	$\times$1,08 $\to$ 47 520	$-$10 000 $\to$ 37 520
3	37 520	$\times$1,08 $\to$ 40 521,60	$-$10 000 $\to$ 30 521,60
4	30 521,60	$\times$1,08 $\to$ 32 963,33	$-$10 000 $\to$ 22 963,33
5	22 963,33	$\times$1,08 $\to$ 24 800,40	$-$10 000 $\to$ 14 800,40

Restlånet etter fem år er altså 14 800,40 kroner.

Tabellen er fin og overiktleg, men når låneperioden vert lenger, vert det tungvint. Lat oss freista ein meir abstrakt metode òg, som vert meir praktisk med lange låneperiodar, og so samanlikna svara.

Løysing 5.13 (Kontantstraumen)**.** Lånet kan me modellera som to uavhengige kontantstraumar: ei låneutbetaling frå banken og ein serie med nedbetalingar. Oppgåva spør om lånesaldoen etter fem år. Me må difor samanlikna verdien av dei to straumane etter fem år.

Verdien av utbetalinga er lånebeløpet med renter for fem år:

$$U = 50\,000 \cdot 1{,}08^5 = 73\,466{,}40$$

Verdien av innskota kan me rekna ut med same rentesats, men med færre renteperioda. Fyrste nedbetaling skjer om eitt år og får renter for fire år; siste nedbetaling om fem år får ikkje renter.

$$I = \sum_{i=0}^{4} 10\,000 \cdot 1{,}08^i$$

Med formellen for geometrisk rekkje har me:

$$I = 10\,000 \cdot \frac{1{,}08^5 - 1}{1{,}08 - 1} = 58\,666{,}01.$$

Lånesaldoen etter fem år er differansen

$$S = U - I = 14\,800{,}39.$$

Restlånet etter fem år er altså 14 800,39 kroner.

Merknad 5.6. Der er eit avvik på eitt øre mellom dei to svara. Årsaka til dette må vera avrundingsfeil. I tabellen runda me av til to desimalar for kvar line. Sjølv om kvar avrundingsfeil er mindre enn eit halvt øre, kan dei summera opp til eit heilt øre eller meir over fem liner. I den andre løysinga har me berre runda av to gongar, ein for I og ein for U, og avrundingsfeilen i sluttsvaret vert (venteleg) mindre.

Merknad 5.7. Sjølv om det andre løysingsforslaget er meir presist frå eit matematisk synspunkt, med mindre avrundingsfeil, so er det ikkje sikkert at det er det mest riktige svaret i røynda. Ofte kan lånevilkåra spesifisera at avrunding til heile øre skal skje kvart år, slik som rekna i tabellen. Slik som oppgåva er formulert, må me rekna båe løysingane for korrekte.

Øvingsoppgåve 5.24. Lars Magnus går av med pensjon, med ein pensjonsformue på 1,2 millionar kroner. Dei fyrste fem åra vil han reisa, og bruka relativt mykje pengar. Han vil difor ha ei årleg utbetaling (annuitet) på 200 000 kr desse fem åra. Avkastinga på pensjonskontoen er 4%. Kor mykje har han att på pensjonskontoen etter fem år (like etter at han har fått den femte annuiteten)? Løys helst oppgåva på to måtar, og samanlikn svara.

Øvingsoppgåve 5.25. Kalle har eit annuitetslån til 3,5% rente. Lånet var på 2 millionar kroner for tjue år sidan, og han har betalt 100 000 kr i året i renter og avdrag. Kor stort er lånet i dag?

Eksempeloppgåve 5.26. Sofie skal kjøpa bil og må låna pengar i banken. Ho vil ha eit annuitetslån, slik at ho betaler eit fast årleg beløp (annuitet) som dekkjer renter og avdrag. Renta er 5%, og lånet må vera betalt innan fem år. Ho har råd til å betala 20 000 kr per år. Kor mykje kan ho låna?

Løysing 5.14. Dette er eit noverdiproblem. Låneproblemet har to betalingsstraumar: det som banken betaler (låner) til Sofie, og det som Sofie betaler til banken. Desse to straumane må ha same verdi. Noverdi er standardmålet når me skal samanlikna pengebeløp på ulike tidspunkt.

Lånebeløpet på x kr vert utbetalt no, so noverdien er òg x.

Innbetalingane er ein straum med fem årlege annuitetar, den fyrste om eitt år. Her reknar med noverdi slik som me har gjort før. Noverdien er

$$V = \sum_{i=1}^{5} 20\,000 \cdot \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^i = 20\,000 \cdot \sum_{i=1}^{5} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^i.$$

For å bruka formelen, må me trekkja ut éin faktor slik at summen startar med $i = 0$.

$$V = \frac{20\,000}{1{,}05} \cdot \sum_{i=0}^{4} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^i = \frac{20\,000}{1{,}05} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^5 - 1}{\frac{1}{1{,}05} - 1}.$$

Resten kan me ta på kalkulator, og me finn at Sofie kan låna $V = 86\,589{,}53$ kroner.

Øvingsoppgåve 5.27. Stein og Stine skal kjøpa leilegheit. Dei kan få eit annuitetslån til 3% rente over 20 år. Dei har råd til å betala 120 000 kr per år i renter og avdrag. Kor mykje kan dei låna?

Eksempeloppgåve 5.28. Ronny vil kjøpa motorsykkel og vil låna 100 000 kroner i banken. Renta er 8% og han må betala ned lånet over fem år. Han ynskjer eit annuitetslån, slik at han betaler eit fast årleg beløp (annuitet) som dekkjer renter og avdrag. Kor mykje må han betala per år?

Løysing 5.15. Her kan me bruka same modell som i oppgåve 5.26. Skilnaden er at lånebeløpet på 100 000 er kjend, medan den årlege tilbakebetalinga er ukjend, lat oss kalla beløpet x.

Noverdien av lånet er 100 000 kroner.

Noverdien av tilbakebetalinga er

$$V = x \cdot \sum_{i=1}^{5} \left(\frac{1}{1{,}08}\right)^i = x \cdot 1{,}08 \cdot \sum_{i=0}^{4} \left(\frac{1}{1{,}08}\right)^i = \frac{x}{1{,}08} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1{,}08}\right)^5 - 1}{\frac{1}{1{,}08} - 1}.$$

Ved hjelp av kalkulator kan me forenkla likninga

$$V = \frac{x}{1{,}08} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1{,}08}\right)^5 - 1}{\frac{1}{1{,}08} - 1} = \frac{x}{1{,}08} \cdot 4{,}312\,13 = x \cdot 3{,}992\,71.$$

Sidan lånet er 100 000 kroner, må me ha $V = 100\,000$ for å gjera opp. Det gjev likninga

$$100\,000 = x \cdot 3{,}992\,71.$$

Me løyser ved å dela på båe sidene:

$$x = \frac{100\,000}{3{,}992\,71} = 25\,045{,}65.$$

Han må altso betala 25 045,65 kroner i året.

Øvingsoppgåve 5.29. Ronny (i forrige oppgåve) går til ein annan bank for å sjå om der finst betre tilbod på annuitetslån på 100 000 kroner. Han får eit tilbod med nedbetaling over seks år og rente på 8,5%. Kor mykje må han betala per år?

5.7 Månadleg nedbetaling

I alle oppgåvene i forrige avsnitt såg på lån med årleg nedbetaling. Lat oss no sjå på meir realistiske lån med månadleg nedbetaling.

Eksempeloppgåve 5.30. Iris kjøper båt og låner 60 000 kroner i banken til 6% nominell rente per år. Ho får eit annuitetslån der ho skal betala 1000 kroner i månaden i renter og avdrag. Forrentinga skjer òg månadleg, samstundes med forfall på avdraga. Kor mykje av lånet gjenstår etter fem år?

Løysing 5.16. Her taler oppgåva både om år og månader. Me må rekna om slik at me har alle tala rekna i månader, slik at det stemmer med nedbetalingstidspunkta.

Renta er 6% per år, nominelt. Månadsrenta vert då

$$r = \frac{6\%}{12} = 0{,}5\%.$$

Dette gjev ein vekstfaktor på 1,005. Nedbetalingstida er fem år, eller $5 \cdot 12 = 60$ månader.

Over fem år veks lånet til

$$U = 60\,000 \cdot 1{,}005^{60} = 80\,931{,}01.$$

Verdien av nedbetalingane er

$$I = \sum_{i=0}^{59} 1000 \cdot 1{,}005^i$$

Med formellen for geometrisk rekkje har me:

$$I = 1000 \cdot \frac{1{,}005^{60} - 1}{1{,}005 - 1} = 69\,770{,}03.$$

Restlånet er differansen $U - I = 11\,160{,}98$ kroner.

Merknad 5.8. Merk at den effektive renta vert høgare enn den nominelle, årlege renta med månadleg forrenting. Oppgåva presiserer at renta er oppgjeve nominelt, og då er det enkelt å rekna ut månadsrenten, men vanskeleg å samanlikna kostnadene med andre lån med årleg nedbetaling.

Øvingsoppgåve 5.31. Lars Magnus går av med pensjon, med ein pensjonsformue på ein million kroner. Dei fyrste fem åra vil han reisa, og bruka relativt mykje pengar. Han vil difor ha ei månadleg utbetaling (annuitet) på 15 000 kroner desse fem åra. Avkastinga på pensjonskontoen er 4%. Kor mykje har han att på pensjonskontoen etter fem år.

Merknad 5.9. Merk korleis oppgåvene over liknar på oppgåve 5.23 og 5.24. Oppgåvene nedanfor er likeeins analoge til dei andre oppgåven i forrige avsnitt.

Øvingsoppgåve 5.32. Kalle har eit annuitetslån til 3,5% rente. Lånet var på 2 millionar kroner for femten år sidan, og han har betalt 10 000 kr i månaden i renter og avdrag. Kor stort er lånet i dag?

Øvingsoppgåve 5.33. Stein og Stine skal kjøpa leilegheit. Dei kan få eit annuitetslån til 3% rente over 20 år, med månadleg forrenting og nedbetaling. Dei har råd til å betala 10 000 kr per månad i renter og avdrag. Kor mykje kan dei låna?

Øvingsoppgåve 5.34. Ronny vil kjøpa motorsykkel og vil låna 100 000 kroner i banken. Renta er 6% og han må betala ned lånet over fem år med månadleg forrenting og nedbetaling. Kor mykje må han betala per månad?

5.8 Uendeleg kontantstraum

Eksempeloppgåve 5.35. Investoren Kristin West vurderer å kjøpa opp gründerbedrifta Knallstraum AS. Knallstraum AS er bygd på ein unik idé, og Kristin reknar med at dei vil tena 20 millionar kroner i året i all framtid. Kva er noverdien til bedrifta når me reknar med 4% diskonteringsrente?

Løysing 5.17. Noverdien til ei bedrift, er verdien av den kontantstraumen (inntektsstraumen) som ho er venta å gje. Det er naturleg å tenkja at den fyrste inntekten kjem om eitt år, slik at noverdien vert

$$I_1 = \frac{20}{1{,}04},$$

rekna i mNOK.

Heile kontantstraumen vert ein sum med uendeleg mange ledd:

$$I = \frac{20}{1{,}04} + \frac{20}{1{,}04^2} + \frac{20}{1{,}04^3} + \frac{20}{1{,}04^4} + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{20}{1{,}04^j} = 20 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^j,$$

der ∞ tyder uendeleg. Dette er eit godt utgangspunkt for å bruka formelen for ei geometrisk rekkje, men éin ting er feil. Summen startar på $j = 1$, medan formelen krev at han startar med $j = 0$. Dette kan me ordna, ved å ta éin faktor til utanfor summen:

$$I = 20 \cdot \frac{1}{1{,}04} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{j-1}.$$

No ser me at når me tel frå 1, startar eksponenten $j - 1$ på 0. Set me inn $i = j - 1$, får me

$$I = \frac{20}{1{,}04} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{i}.$$

No har me den vande formen, og formelen gjev

$$I = \frac{20}{1{,}04} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{\infty} - 1}{\frac{1}{1{,}04} - 1}. \tag{5.4}$$

Sjå no på potensen som dukkar opp:

$$(\frac{1}{1{,}04})^{\infty}$$

Sidan nemnaren er større en teljaren er brøken mindre enn 1, og når me gongar brøken med seg sjølv vert talet enno mindre. Eksponenten ∞ tyder at me gongar brøken med seg sjølv uendeleg mange gongar, og dermed kjem potensen uendeleg nær null.

$$(\frac{1}{1{,}04})^{\infty} \approx 0$$

Då får me

$$I = \frac{20}{1{,}04} \cdot \frac{-1}{\frac{1}{1{,}04} - 1} = \frac{-20}{1 - 1{,}04} = \frac{-20}{-0{,}04} = \frac{20}{0{,}04}$$

Det siste steget tek me på kalkulator og finn $I = 500$. Mao. bedrifta er verd 500 mNOK.

Øvingsoppgåve 5.36. Karl er ein litt meir pessimistisk investor. Han vurderer òg å by på Knallstraum AS, som i forrige oppgåve. Han er samd i inntektsvurderinga på 20 millionar kroner i året, men han reknar med 3% diskonteringsrente. Kor mykje kan Karl maksimalt tenkja seg å by på bedrifta?

Øvingsoppgåve 5.37. Optimisten Ola trur at Knallstraum AS kjem til å tena 25 millionar kroner i året i all framtid. Han reknar med 3,5% diskonteringsrente. Kor mykje meiner Ola at bedrifta er verd?

Merknad 5.10. Me har brukt litt uortodoks notasjon over, og skriv x^{∞} der strenge matematikarar ville ha skrive

$$\lim_{a \to \infty} x^a.$$

Denne notasjonen med lim for latin *limes* (engelsk *limit*) eller grenseverdi på norsk, er nyttig nok, men her er han unødvendig tungvint. Den uortodokse notasjonen x^{∞} er mykje lettare å forstå, og sidan han òg er utvetydig er det uproblematisk å ta han i bruk.

År	Inflasjon
1984	6,4%
1983	8,5%
1982	11,4%
1981	13,4%
1980	11,0%
1979	4,6%
1978	8,1%
1977	9,2%

Tabell 5.1: Inflasjon over ein kort historisk periode i Noreg. Kjelde *Smarte Penger*.

5.9 Gjennomsnittleg vekst

Eksempeloppgåve 5.38. Kor mykje auka prisane i Noreg totalt i fireårsperioden 1981–1984. Prisauka (inflasjonen) for kvart av åra står i tabell 5.1.

Løysing 5.18. Me tek prosentvis auke for kvart år frå tabellen, og finn vekstfaktorane:

$$1{,}134, 1{,}114, 1{,}085, 1{,}064.$$

Dersom me skriv I_0 for prisindeksen (prisnivået) ved inngangen til 1981, vert prisindeksen ved utgangen av 1984

$$I_1 = I \cdot 1{,}134 \cdot 1{,}114 \cdot 1{,}085 \cdot 1{,}064 \approx 1{,}458.$$

Prisene har altso auka med 45,8% over fire år.

Øvingsoppgåve 5.39. Kva er er den samla prosentvise prisauka i Noreg over fireårsperioden 1977–1980? Prisauka (inflasjonen) for kvart av åra står i tabell 5.1.

Eksempeloppgåve 5.40. Dersom me reknar ut (det aritmetriske) gjennomsnittet av prisaukene for åra 1981–1984, får me

$$\frac{13{,}4\% + 11{,}4\% + 8{,}5\% + 6{,}4\%}{4} = 9{,}925\%.$$

Kor mykje ville prisane ha auka over fireårsperioden dersom prisauka faktisk hadde vore 9,925% kvart einaste år?

Løysing 5.19. Dersom I_0 er prisindeksen før perioden, vert prisindeksen etter fire år

$$I_1 = I \cdot 1{,}099\,25^4 \approx I \cdot 1{,}460.$$

Prisene hadde altso auka med 46,0% over fire år.

Øvingsoppgåve 5.41. Dersom me reknar ut (det aritmetriske) gjennomsnittet av prisaukene for åra 1981–1984, får me

$$\frac{11{,}0\% + 4{,}6\% + 8{,}1\% + 9{,}2\%}{4} = 8{,}225\%.$$

Kor mykje ville prisane ha auka over fireårsperioden dersom prisauka faktisk hadde vore 8,225% kvart einaste år?

Merknad 5.11. Me er vane med at når me legg saman fire tal, so får me same resultat om me tek gjennomsnittet og gongar med fire. I oppgåvene over ser me at dette ikkje stemmer med prisauker i prosent. Grunnen er at prosentaukene ikkje vert addert. I staden gongar me saman vekstfaktorane. Det gjennomsnittet som me er vane med å rekna med vert ofte kalla aritmetisk gjennomsnitt, og det er nyttig for *additive* problem.

Når problemet er multiplikativt, treng me *geometrisk* gjennomsnitt. Det skal me sjå på nedanfor.

Eksempeloppgåve 5.42. Me såg over at prisane auka med 45,8% over fireårsperioden 1981–1984. Tenk deg at inflasjonen var den same alle fire åra. Kor stor må den årlege inflasjonen vera for å gje totalt 45,8% vekst over fire år?

Løysing 5.20. Vekstfaktoren over fire år er 1,458. Når inflasjonen er den same kvart år, vert òg vekstfaktoren v den same. Prisindeksen på slutten av perioden er altso $I_0 \cdot 1{,}458$ eller $I_0 \cdot v^4$. Me får altso likninga

$$1{,}458 = v^4,$$

som me kan løysa ved hjelp av logaritmar:

$$\ln 1{,}458 = \ln v^4 = 4 \cdot \ln v.$$

Me delar på 4 og får (vha. kalkulator)

$$\ln v = \frac{\ln 1{,}458}{4} \approx 0{,}094\,266.$$

For å finna v, må me no bruka eksponentialfunksjonen (e^x eller exp på kalkulatoren):

$$v \approx \exp 0{,}094\,266 \approx 1{,}0989.$$

Inflasjonen er altso 9,89% i gjennomsnitt.

Merknad 5.12. Det me har rekna ut i oppgåva over er det geometriske gjennomsnittet av dei årlege inflasjonsratane.

Merknad 5.13. Logaritmefunksjonen ln som me har brukt før, og eksponentialfunksjonen exp er inverse funksjonar. Dvs. at dersom $\ln y = x$, so er $\exp x = y$.

Denne eksponentialfunksjonen er eit særtilfelle av eksponentialfunksjonane som me studerte i kapittel 4. Me kan skriva $\exp x = e^x$ der talet e er (omtrent) 2,718 281 828 459 045. Akkurat dette talet, og eksponentialfunksjonen exp har mange pene matematiske eigenskaper, men det må me koma tilbake til seinare. Det einaste du treng vita no, er at ln og exp er omvendte funksjonar og kvar du finn dei på kalkulatoren.

År	Inflasjon
1924	10,7%
1923	−6,7%
1922	−16,7%
1921	−6,5%
1920	14,9%
1919	6,3%
1918	40,0%

Tabell 5.2: Inflasjon og deflasjon over ein kort historisk periode i Noreg. Kjelde *Smarte Penger*.

Øvingsoppgåve 5.43. Rekn ut gjennomsnittleg årleg inflasjon for perioden 1977–1980. Bruk geometrisk gjennomsnitt.

Eksempeloppgåve 5.44. Me er vane med at prisane berre går opp. Historisk har det likevel hendt at prisane går ned. Det kaller me *deflasjon*, som rett og slett er inflasjon med negativt forteikn. Tabell 5.2 viser inflasjonen 1918–1924. Kva er vekstfaktoren for prisindeksen i 1923 og i 1924.

Løysing 5.21. I 1924 har me vekst på $r = 10{,}7\%$ eller mao. $r = 0{,}107$. Vekstfaktoren er $1 + r = 1{,}107$.

Tilsvarande i 1923, har me $r = -6{,}7\% = 0{,}067$ og vekstfaktoren er

$$1 + r = 1 + (-0{,}067) = 1 - 0{,}067 = 0{,}933.$$

Øvingsoppgåve 5.45. Kva er vekstfaktoren for prisindeksen i 1922. Bruk tabell 5.2.

Øvingsoppgåve 5.46. Kva er vekstfaktoren for prisindeksen i 1918. Bruk tabell 5.2.

Eksempeloppgåve 5.47. Finn gjennomsnittleg inflasjon i perioden 1922–1924. Bruk grunnlagstala frå tabell 5.2.

Løysing 5.22. Tala frå tabellen gjev vekstfaktorane 1,107%, 0,933% og 0,833%. Samla vekst er då

$$1{,}107 \cdot 0{,}933 \cdot 0{,}833 = 0{,}8603.$$

Me skal finna gjennomsnittleg vekstfaktor v slik at tre år med vekst v gjev samla vekst med vekstfaktor 0,8603. Med andre ord skal me løysa likninga

$$0{,}8603 = v^3,$$

eller

$$\ln 0{,}8603 = 3 \ln v.$$

Dette gjev

$$\ln v = \frac{\ln 0{,}8603}{3} \approx -0{,}050\,158.$$

Vekstfaktoren då er

$$v = \exp(-0{,}050\,158) \approx 0{,}951.$$

For å skriva dette som prosentvis vekst, finn med $r = v - 1 = -0{,}0489$. Me har altso ein gjennomsnittleg inflasjon på $-4{,}9\%$ per år, eller ein gjennomsnittleg deflasjon på $+4{,}9\%$ per år.

Øvingsoppgåve 5.48. Finn gjennomsnittleg inflasjon i sjuårsperioden 1918–1924. Bruk grunnlagstala frå tabell 5.2.

5.10 Serielån

Eksempeloppgåve 5.49 (Serielån)**.** Ola har lånt 50 000 kroner til 5% rente. Kvart år betaler han ned 10 000, i tillegg til rentene som påløp det året.

1. Kor mykje må han betala kvart år?
2. Kor lang tid tek det før lånet er nedbetalt?

Løysing 5.23. Lat oss setja opp alle utrekningane i ein tabell for å få god oversikt. Alle beløpa er i kroner.

År	Gamal saldo	Renter	Avdrag	Total innbetaling	Ny saldo
1	50 000	$50\,000 \cdot 0{,}05 = 2500$	10 000	12 500	40 000
2	40 000	$40\,000 \cdot 0{,}05 = 2000$	10 000	12 000	30 000
3	30 000	$30\,000 \cdot 0{,}05 = 1500$	10 000	11 500	20 000
4	20 000	$20\,000 \cdot 0{,}05 = 1000$	10 000	11 000	10 000
5	10 000	$10\,000 \cdot 0{,}05 = 500$	10 000	10 500	0

Me ser at lånesaldoen er (eksakt) null etter fem år. Det tek altso fem år å betala ned lånet.

Øvingsoppgåve 5.50 (Serielån)**.** Lise har lånt 60 000 kroner til 10% rente. Kvart år betaler ho ned 12 000, i tillegg til rentene som påløp det året.

1. Kor mykje må ho betala kvart år?
2. Kor lang tid tek det før lånet er nedbetalt?

Øvingsoppgåve 5.51 (Serielån)**.** Helene har lånt 75 000 kroner til 5% rente. Kvart år betaler ho ned 5000, i tillegg til rentene som påløp det året. Kor lang tid tek det før lånet er nedbetalt?

Øvingsoppgåve 5.52 (Serielån)**.** Hilde har lånt 100 000 kroner til 5% rente. Ho skal betala ned over ti år. Kor mykje må ho betala i avdrag kvart år, utan å rekna med rentene?

Øvingsoppgåve 5.53 (Samanlikning av serie- og annuitetslån)**.** Olav vil låna 100 000 kroner. Renta er 4% med nedbetaling over fem år. Han har valget mellom eit serielån og eit annuitetslån med årleg innbetaling.

1. Set opp ein tabell som viser kva han må betala per år for serielånet.
2. Kor mykje må han betala totalt for serielånet, summert over fem år?
3. For annuitetslånet må han betala like mykje alle åra. Kor stort er dette beløpet?
4. Kor mykje må han betala totalt for annuitetslånet, summert over fem år?

5.11 Andre oppgåver

Øvingsoppgåve 5.54. Kjersti hadde 100 000 kr. i eit aksjefond. Ved slutten av kvart år får ho 5% avkasting og tek ut 1000kr. Kor mykje står att på fondet etter 20 år?

5.12 Vidare lesing

Bjørnestad *et al* dekkjer finansmatematikken i kapittel 5.5. Framstillinga deira legg stor vekt på å presentera formlar for ulike særtilfelle, og det vil vera svært krevjande å pugga alle og halda dei frå kvarandre. Me trur at de vil vera betre tjent med å studera korleis den eine formelen i rekneregel 5.1 kan brukast på mange ulike måtar, slik som me har freista i dette kapittelet.

Det teoretiske grunnlaget for finansmatematikken presenterer Bjørnestad *et al* i kapittel 5.1, 5.3 og 5.4. Det er ein god idé å gå gjennom denne teorien, og samanlikna dei abstrakte forklaringane i læreboka med dei praktiske løysingsteknikkane som me har presentert her.

Oppgåvene i læreboka er verd å gjera, særleg oppgåvene i kapittel 5.5.

6 Aritmetiske rekkjer

Til øvingstimen 10 (23. september 2019). I dag er det berre å ta fatt på dette kapittelet og arbeida so langt som de kjem.

Deretter kan de jobba med

1. Kapittel 5.1–5.4 i læreboka. Dette gjev ei matematisk innføring i rekneteknikkane som vert brukte i øvingsheftet.

2. I Kapittel 5.5 kan ein finna fleire oppgåver av same type som i øvingsheftet.

6.1 Månadleg sparing i eitt år

I forrige kapittel studerte me annuitetar, der renteperiodane og annuitetsperiodane fall saman, t.d. årleg sparing med årleg forrenting. I røynda er det vanleg å spara månadleg, men få rentene årleg. Då vert problemet meir samansett, men me kan løysa det likevel.

Eksempeloppgåve 6.1. Jenny sparer 1000 kroner i månaden. Ho får 3% årleg rente, og rentene vert lagde til på slutten av året. Pengar som berre har stått på konto ein del av året får rente berre for den tida dei har stått på konto. Ho set inn pengane på slutten av kvar månad frå januar til desember. Kor mykje har Jenny på konto etter renteutbetalinga 31. desember?

Løysing 6.1. Jenny set inn tolv tusenlappar, som for ulike rentepåslag. Den fyrste tusenlappen står 11 månader og får eit rentepåslag på

$$3\% \cdot \frac{11}{12} = 2{,}75\%$$

av beløpet. Det andre beløpet står ti månader og får

$$3\% \cdot \frac{10}{12} = 2{,}5\%$$

Rekneregel 6.1 Gauss' formel

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{6.1}$$

av beløpet. Slik held det fram slik at saldoen vert

$$
\begin{aligned}
S &= 1000 \cdot \left(1 + \frac{11 \cdot 3\%}{12}\right) + 1000 \cdot \left(1 + \frac{10 \cdot 3\%}{12}\right) + \ldots + 1000 \cdot \left(1 + \frac{0 \cdot 3\%}{12}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{11} 1000 \cdot \left(1 + \frac{i \cdot 3\%}{12}\right)
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

Dette liknar litt på dei geometriske rekkjene som me har sett, men der er ein skilnad, me kaller det ei *aritmetisk rekkje*. Det kjem me tilbake til sidan.

Lat oss dela opp summen, slik at me ser innskota og rentene kvar for seg:

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{i=0}^{11} \left(1000 + 1000 \cdot \frac{i \cdot 3\%}{12}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{11} 1000 + \sum_{i=0}^{11} 1000 \cdot \frac{i \cdot 3\%}{12}.
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

Det fyrste ledded er simpelthen tolv innskot på 1000 kroner, til saman 12 000 kroner. Det andre leddet er rentene. Lat oss sjå litt nærare på dei. Sidan ledda i summen er produkt der dei fleste ledda er eins, kan me trekkja utanfor summeteiknet, slik:

$$
\begin{aligned}
R &= \sum_{i=0}^{11} 1000 \cdot \frac{i \cdot 3\%}{12}) \\
&= \frac{1000 \cdot 3\%}{12} \cdot \sum_{i=0}^{11} i
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

Faktoren foran summeteiknet er rentebeløpet som éin tusenlapp tener på éin månad. Summen talet på månader som tusenlappane har stått til saman. Her kan me bruka Gauss' formel for rekneregel 6.1. Resultatet vert

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{1000 \cdot 3\%}{12} \cdot \frac{11 \cdot 12}{2} \\
&= \frac{1000 \cdot 3\% \cdot 11}{2} \\
&= 165.
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

Saldoen på slutten av året er då

$$
S = 12\,000 + 165 = 12\,165. \tag{6.6}
$$

Merknad 6.1. I gamle dagar brukte ein 360 rentedagar i året, 30 rentedager i månaden, slik at ein ikkje fekk renter for den 31. i kvar månad, og doble eller tredoble renter siste dagen i februar. Dette var for å gjera jobben enkel for bokhaldarar som rekna for hand.

I dag får ein renter per kalenderdag. Datamaskiner har gjort at bankane klarer det. Prinsippet er det same; det er berre tala som vert styggare. For å læra prinsippet, reknar me for hand med 360 rentedagar i året. Løysinga over føreset 360 rentedagar i året.

Øvingsoppgåve 6.2. Anne Marie sparer 1200 kroner i månaden. Ho får 3,5% årleg rente, og rentene vert lagde til på slutten av året. Pengar som berre har stått på konto ein del av året får rente berre for den tida dei har stått på konto. Kor mykje har Anne Marie på konto etter renteutbetalinga 31. desember?

6.2 Månadleg sparing over tid

Eksempeloppgåve 6.3. Jenny sparer 1000 kroner i månaden. Ho får 3% årleg rente, og rentene vert lagde til på slutten av året. Kor mykje har Lise Lotte på konto etter 10 år?

Løysing 6.2. Denne oppgåva er litt meir komplisert enn dei vi har sett tidlegare, fordi me både må rekne med månadlege sparebeløp og med renter éin gong i året over fleire år. For å dela opp problemet i løysbare delar, tek me ein liten omveg.

Fyrst lat oss merkje oss at me (i dette tilfellet) får like mykje renter på sparepengane, uansett om me deler det på fleire konti eller har alt på same. Lat oss difor tenkja oss at Jenny har to konti. Slik at ho sparer månadleg på konto 1, og overfører alle pengane med renter på slutten av kvart år til konto 2.

På konto 1 sparer ho altso akkurat som i oppgåve 6.1. Sparinga og rentesatsen er den same kvart år, og ho sparer dermed opp 12 165 kroner per år på denne kontoen.

På konto 2 overfører ho 12 165 kroner éin gong i året, like etter renteutbetalinga. Dette dannar dermed ei geometrisk rekkje som me er van med. Han set inn 10 slike beløp, der det fyrste får rente ni gongar og det siste null gongar. Saldoen vert dermed

$$S = \sum_{i=0}^{9} 12\,165 \cdot 1{,}03^i = 12\,165 \cdot \frac{1{,}03^{10} - 1}{0{,}03} = 139\,458{,}09.$$

Han sparer altso opp 139 458 kroner.

Øvingsoppgåve 6.4. Karl Anders sparer 2000 kroner i månaden. Han får 4% årleg rente, og rentene vert lagde til på slutten av året. Kor mykje har Karl Anders på konto etter åtte år?

6.3 Sparemål

Eksempeloppgåve 6.5. Jenny sparer 1000 kroner i månaden. Ho får 3% årleg rente, og rentene vert lagde til på slutten av året. Kor mange år tek det før Jenny har spart 200 000 kroner?

Løysing 6.3. Her kan me bruka same tankesett som i oppgåve 6.3. Jenny sparer totalt 12 165 kroner per år inklusive renter på dei nye innskota. Over t år har ho spart

$$S = \sum_{i=0}^{t-1} 12\,165 \cdot 1{,}03^i = 12\,165 \cdot \frac{1{,}03^t - 1}{0{,}03}.$$

Når me veit at målet er $S = 200\,000$, får me ein eksponentiell likning

$$200\,000 = 12\,165 \cdot \frac{1{,}03^t - 1}{0{,}03}$$

som me forenklar til

$$\frac{200\,000 \cdot 0{,}03}{12\,165} = 1{,}03^t - 1$$

eller

$$1{,}03^t = \frac{200\,000 \cdot 0{,}03}{12\,165} + 1 = 1{,}493\,218.$$

Dette gjev

$$t = \frac{\ln 1{,}493\,218}{\ln 1{,}03} = 13{,}56.$$

Jenny treng altso mellom 13 og 14 år for å nå sparemålet.

Øvingsoppgåve 6.6. Anne Marie sparer 1200 kroner i månaden. Ho får 3,5% årleg rente, og rentene vert lagde til på slutten av året. Kor mange år tek det før Anne Marie har spart 200 000 kroner? (Bruk oppgåve 6.2 som mellomrekning.)

Øvingsoppgåve 6.7. I oppgåve 6.5 rekna me berre ut omtrentleg at Jenny trengte 13–14 år. Rekn ut nøyaktig kor mykje Jenny har på konto etter 13 år, og kor mykje ho då manglar på 200 000. Rekn so ut kor mange fleire månader ho må spara for å nå målet på 200 000. Hugs at ho ikkje får renter igjen før der er gått 12 nye månader.

6.4 Fleire oppgåver

Øvingsoppgåve 6.8. Kalle har 4% rente på sparekontoen og set inn 100 kr. per månad. Kor mykje har han på konto etter eitt år?

Han får rente på slutten av kvart år. Pengar som berre har stått på konto delar av året får rente i forhald til kor lenge dei har stått.

Øvingsoppgåve 6.9. Kalle har 4% rente på sparekontoen og set inn 100 kr. per månad. Kor mykje har han på konto etter ti år?

Han får rente på slutten av kvart år. Pengar som berre har stått på konto delar av året får rente i forhald til kor lenge dei har stått.

7 Fleire døme

Desse oppgåvene vart gjevne som obligatorisk arbeidskrav i 2018. Dei er stadig relevante og eg vil råda dykk til å freista å løysa dei når de er ferdige med resten av heftet, og bruka løysingsforslaga som fasit om det trengst.

Eksempeloppgåve 7.1. Snorre og Synnøve har arva ein millon kroner kvar og set pengane i aksjefond. Snorre vel eit lågrisikofond og får 1,5% rente (avkasting) per år. Synnøve vel høgare risiko, og har flaks; ho får 2,5% rente.

1. Plott verdiutviklinga for både Snorre og Synnøve i same koordinatsystem frå innskotstidspunktet og femti år fram i tid.
2. Kor lang tid tek det før Snorre har fått dobla verdien?
3. Kor lang tid tek det før Synnøve har fått dobla verdien?

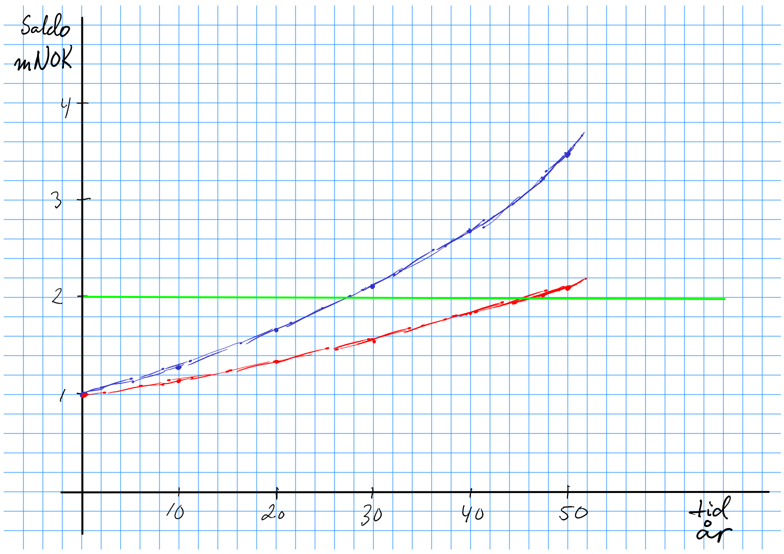
Løysing 7.1. Saldoen hennar Synnøve (i millionar kroner) kan skrivas som

$$S_1 = 1{,}025^t,$$

der t er tida i år. Tilsvarande er saldoen hans Snorre

$$S_2 = 1{,}015^t.$$

Me plottar båe funksjonane ved å rekna ut saldoen for $t = 0, 10, 20, 30, 40, 50$ år.



Me ser på augemål at Snorre doblar saldoen etter cirka 45 år, og Synnøve etter rundt 27 år. For å finna nøyaktige tal, må me derimot løysa likninga $S_1 = 2$ for Synnøve og $S_2 = 2$ for Snorre.

For Synnøve har me då

$$\begin{aligned} 2 &= 1{,}025^t, &(7.1)\\ \ln 2 &= \ln 1{,}025^t, &(7.2)\\ \ln 2 &= t \cdot \ln 1{,}025, &(7.3)\\ t &= \frac{\ln 2}{\ln 1{,}025} \approx 28{,}07. &(7.4) \end{aligned}$$

Det tek altso litt meir enn 28 år før Synnøve har dobla saldoen. Plottet er med andre ord ikkje heilt presist, men det er akseptabelt.

For Snorre har me

$$\begin{aligned} 2 &= 1{,}015^t, &(7.5)\\ \ln 2 &= \ln 1{,}015^t, &(7.6)\\ \ln 2 &= t \cdot \ln 1{,}015, &(7.7)\\ t &= \frac{\ln 2}{\ln 1{,}015} \approx 46{,}56. &(7.8) \end{aligned}$$

Det tek altso litt cirka $45\frac{1}{2}$ år før Snorre har dobla saldoen. Igjen er plottet litt upresist men akseptabelt.

Merknad 7.1. Denne oppgåva gjev ein del tolkingsrom i korleis ein skal svara. Rådet er då å bruka både plottet og algebraen for å dobbelsjekka svaret, og styrka presentasjonen.

Oppgåva er definitivt relevant som eksamensoppgåve, men formuleringa vil normalt vera litt meir presis på eksamen.

Eksempeloppgåve 7.2. Du får tilbod om eit lån til 3% nominell rente per år, med månadleg forrenting. Der er ingen gebyr. Kva er den effektive rentesatsen?

Løysing 7.2. Rentesatsen på 3% per år, gjev $3\%/12 = 0{,}25\%$ rente per månad. Med månadleg forrenting, vert vekstfaktoren 1,0025 på ein månad. Over tolv månader vert vekstfaktoren

$$1{,}0025^{12} = 1{,}0304,$$

som svarer til ein effektiv rentesats på 3,04% per år.

Merknad 7.2. Dette problemet kan dukka opp på eksamen, sjølv om ein ikkje tidlegare har spurt om effektiv rentesats. Då kan ein rekna med at effektiv rente vert definert i oppgåva, men teknikken må ein kunna.

Eksempeloppgåve 7.3. Politikarane debatterer ny hovudveg, som evt. kan byggjast 2022–24. Kostnaden er venta å verta éin milliard kroner kvart år i byggjeperioden på tre år. Diskonteringsrenta er 4%. Rekn ut noverdien (per 2018) av dette prosjektet.

Løysing 7.3. Kostnaden omfattar tre beløp, om fire, fem og seks år. Me kan setja dei opp i ein tabell

År	Nominelt	Noverdi
2022	1	$1 \cdot \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^4 = 0{,}8548$
2023	1	$1 \cdot \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^5 = 0{,}8219$
2024	1	$1 \cdot \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^6 = 0{,}7903$
Sum		2,4670

Noverdien av prosjektet er altso 2,467 milliardar kroner.

Merknad 7.3. Ein kan godt setja dette opp som ei geometrisk rekkje, men me berre tre ledd er gevinsten liten. Det beste er å bruka den teknikken som ein er tryggast på.

Merknad 7.4. Slike oppgåver kan dukka opp på eksamen, sjølv om det vil vera meir vanleg med oppgåver med fleire ledd i summen, slik at ein må setja det opp som ei geometrisk rekkje og bruka formel.

Eksempeloppgåve 7.4. Anne Sofie har 20 000 kr. i eit aksjefond. Ved slutten av kvart år får ho 5% avkasting og tek ut 1000 kr. Kor mange år går det før ho har brukt opp pengane?

Løysing 7.4. Avkastinga er $5\% \cdot 20\,000 = 1000$ kroner. Når ho tek ut 1000 kroner svarer det akkurat til avkastinga, og saldoen vert stabil på 20 000 kroner. Pengane hennar varer altso evig.

Merknad 7.5. Ein kan godt setja dette opp algebraisk (vha. ei geometrisk rekkje) og sjå at ein får divisjon med null. So snart ein ser at ho berre tek ut rentane, er derimot presentasjonen over enklare å skriva og enklare å forstå. Det enklaste er ofte det beste.

Merknad 7.6. Dette er kan vera ei eksamensoppgåve, sjølv om det er meir vanleg med ein variant der pengane vert brukte opp og svaret ikkje er uendeleg.

Eksempeloppgåve 7.5. Filip vurderer å kjøpa opp ei lita bedrift. Han trur at bedrifta har eit unikt konsept som vil gje 500 000 kroner i profitt kvart år i all framtid. Han reknar med ei diskonteringsrente på 3%. Kor mykje er han maksimalt viljug til å betala for bedrifta?

Løysing 7.5. Her er me interessert i kontantstraumen på $\frac{1}{2}$ million kroner per år, diskontert med 3% rente per år. Lat oss gå ut frå at den fyrste utbetalinga kjem umiddelbart. Det gjev den geometriske rekkja

$$S = 0{,}5 + 0{,}5 \cdot \frac{1}{1{,}03} + 0{,}5 \cdot \frac{1}{1{,}03^2} + 0{,}5 \cdot \frac{1}{1{,}03^3} + 0{,}5 \cdot \frac{1}{1{,}03^4} + \cdots .$$

Der S er noverdien i millioner kroner. Her kan me bruka formelen for geometriske rekkjer:

$$S = 0{,}5 \cdot \frac{\left(\frac{1}{1{,}03}\right)^\infty - 1}{\frac{1}{1{,}03} - 1} = 0{,}5 \cdot \frac{-1}{\frac{1}{1{,}03} - 1} \approx 17{,}167.$$

Filip kan altso by inntil 17,167 millioner kroner utan å forventa tap.

Det er kanskje meir realistisk at den fyrste utbetalinga kjem om eitt år, og ikkje umiddelbart. Det forskyver heile kontantstraumen eitt år ut i framtida, og noverdien vert $S/1{,}03 \approx 16{,}667$ millionar kroner. Oppgåvå skriv ikkje når utbetalingane tek til.

Merknad 7.7. Mange vil lika å skriva rekkja med summeteikn

$$S = 0{,}5 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1{,}03^i}.$$

Det kan vera fornuftig, men det er viktig å understrekja at det berre er notasjon og får oss ikkje nærare ei løysing. Mao. det er smak og behag.

Merknad 7.8. Løysinga har gjeve to svar med ulik føresetnad. Det gjer ein gjerne i eit absolutt perfekt svar. Det er likevel fullstendig og korrekt å velja éin føresetnad og gje eitt svar. Oppgåva skriv ikkje når utbetalingane tek til, og ein står fritt til å velja. Valet *bør* kommenterast, men det er ein detalj.

Merknad 7.9. Dette er ei ganske typisk eksamensoppgåve.

Litteratur

Ruth C Clark, Frank Nguyen, and John Sweller. *Efficiency in Learning: Evidence-Based Guidelines to Manage Cognitive Load.* Pfeiffer, San Francisco, 2005.

Warren Colburn. *First lessons in arithmetic on the plan of Pestalozzi: With some improvements.* Cummings and Hilliard, second edition, 1822.

Gertrude Hendrix. A new clue to transfer of training. *The Elementary School Journal*, pages 197–208, 1947.

Mogens Niss and Tomas Højgaard. Competencies and mathematical learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark. Technical report, IMFUFA, Roskilde university, 2011.

Johann Heinrich Pestalozzi. *Leonard and Gertrude.* D.C. Heath & Co, Boston, 1908. Translated and abridged by Eva Channing.

S. Sæbø, T. Almøy, and H. Brovold. Does academia disfavor contextual and extraverted students? In *MNT-konferansen*, 2015. Bergen, Norway 18-19 March 2015.

Steinar Thorvaldsen. *Matematisk kulturhistorie.* Eureka forlag, 2002.

Register

U

V