Foreløpig løsningsskisse

Oppgave 1

a) Løs likningen $(x+1)(x-2)(2x-6)=0$. $L=\{-1,2,3\}$

b) Faktoriser polynomet $4x^2-28x+48=4(x-3)(x-4)$

c) Løs ulikheten $\dfrac{x-2}{-x+4}\geq 1.$, $L=[3,4\rangle$

Oppgave 2

En bedrift selger x enheter av en vare per uke. Kostnadsfunksjonen ved aktuelle produksjonsvolumer er $K(x)=x^2+735x-36$. Enhetspris ved salg av x enheter er $p(x)=759-x$.

a) Sett opp et uttrykk for funksjonen $P(x)$ som angir bedriftens profitt (overskudd i kr) ved produksjon av x enheter og skriv funksjonen så enkelt som mulig. $P(x)=(759-x)x-\left(x^2+735x-36\right)=-2x^2+24x+36.$

b) Bestem profittmaksimum, antall enheter bedriften må produsere per dag for å oppnå maksimal profitt.

$$P'=-4x+24.\text{ Maks profitt for }x=6.$$

En annen bedrift selger x enheter av en vare med en annen kostnadsfunksjon, som ved aktuelle produksjonsvolumer er $C(x)=3x^2+226x+2700$.

c) Bestem funksjoner som angir grensekostnaden $C'(x)$ og enhetskostnaden (gjennomsnittskostnaden) $A(x)$ i denne siste bedriften.

$$C'(x)=6x+226.$$
$$A(x)=3x+226+\frac{2700}{x}$$

d) Bestem antall enheter x som gir kostnadsoptimum, altså lavest kostnad per enhet.

$$6x+226=3x+226+\frac{2700}{x}$$
$$x=30\text{ (velg pos.)}$$

Oppgave 3

En funksjon f er gitt ved $f(x)=2x^3-18x^2+30x+1$.

a) Bestem $f'(x)$, den deriverte til $f(x)$. $\quad f'(x)=6x^2-36x+30.$

b) Bestem x-verdien til eventuelle topp- og bunn- og vendepunkter for f-grafen. Avgjør hvilken x-verdi som eventuelt gir topp- henholdsvis bunnpunkt. Lokal topp for $x = 1$, lokal bunn for $x = 5$. Det er tilstrekkelig begrunnelse for klassifiseringen å henvise til at positiv tredjegradskoeffisient gir lokalt toppunkt til venstre for bunnpunkt. Godtas som alternativ til bruk av derivert (eller andrederiverttest) som begrunnelse.

c) Bestem skjæringspunktet mellom x-aksen og den rette linjen som tangerer f-grafen i punktet $(0, f(0))$.

$$y - 1 = 30(x - 0)$$
$$y = 30x + 1$$
$$\text{Punktet er } (-1/30, 0).$$

Oppgave 4

En rett linje l har stigningstall 5 og går gjennom punktet $(1, 20)$.

a) Bestem likningen for linjen l. $y - 20 = 5(x - 1)$, $\quad y = 5x + 15$

b) En annen linje m går gjennom punktene $(2, 40)$ og $(3, 30)$. Bestem likningen for linjen m.

$$y - 40 = \frac{30 - 40}{3 - 2}(x - 2)$$
$$y = -10x + 60$$

c) Bestem x-koordinaten til punktet der linjene l og m skjærer hverandre.

$$5x + 15 = -10x + 60$$
$$x = 3.$$

Oppgave 5

Arne investerer 200 kr og får 20% rente per år

a) Bestem hva Arnes beløp har vokst til etter 27 år ved årlig forrentning. $K = 200 \cdot 1.20^{27} = 27474$.

b) Bestem hva Arnes beløp har vokst til etter 27 år ved kontinuerlig forrentning. $K = 200 \cdot e^{0.20 \cdot 27} = 44281$.

c) Bruk logaritmeregning til å bestemme hvor lang tid det tar før Arnes beløp er firedoblet ved årlig forrentning.

$$1.20^x = 4$$
$$x = \frac{\ln 4}{\ln 1.2} = 7.6036$$
$$\text{Det tar 8 år}$$

d) Per investerer 2000 kr og får 20% rente per år, årlig forrentning. Pål investerer 1000 kr og får 20% rente per år, kontinuerlig forrenting. Hvor lang tid tar det før begge investeringene har samme verdi? Inntil ett års feilmargin godtas i svaret.

$$\begin{aligned}
2000 \cdot 1.20^x &= 1000 \cdot e^{0.20x} \\
\ln 2 + x \ln 1.2 &= 0.20x \\
\ln 2 &= x\,(0.20 - \ln 1.2) \\
x &= \frac{\ln 2}{0.20 - \ln 1.2} = 39.209
\end{aligned}$$

Det tar mellom 39 og 40 år.

Oppgave 6

I en uendelig geometrisk rekke er første ledd lik $a_1 = 16$ og kvotienten er $\frac{1}{2}$.

a) Bestem rekkens niende ledd $a_9 = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{16} = 0.0625$ (Desimaltall godkjennes)

b) Bestem summen av den uendelige geometriske rekken. $s = \frac{16}{1-\frac{1}{2}} = 32$

En annen geometrisk rekke er gitt ved $16 + 16x^2 + 16x^4 + \cdots$.

c) For hvilke verdier av x vil denne rekken konvergere? For $-1 < x < 1$.

d) Bestem et uttrykk som gir summen s av denne uendelige rekken når den konvergerer. $s = \frac{16}{1-x^2}$

e) Finnes det en verdi av x som fører til at rekka får sum 4? $\frac{16}{1-k} = 4$ gir $1 - k = 4$, som gir $k = -3$, ikke mulig for konvergent rekke.

f) Bestem ved logaritmeregning antall ledd i rekken en må vi ta med for at summen skal bli 21 eller større, dersom $x = \frac{1}{2}$. Svaret må utledes - det er ikke tilstrekkelig å bare prøve seg fram.

$$\frac{16\,(1 - 0.25^x)}{1 - 0.25} = 21$$

en del mellomregning

$x = 3.$

Antall ledd må være 3 eller flere.

Oppgave 7

a) Deriver funksjonen $f(x) = (2x + e^x)^5$. $f'(x) = 5(2x + e^x)^4 (2 + e^x)$

b) Deriver funksjonen $f(x) = (e^x + 1)(x - 1)$.

$$f'(x) = e^x (x-1) + (e^x + 1) \cdot 1 = xe^x + 1.$$

c) Deriver funksjonen $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$. $f'(x) = \dfrac{1(1-x) - x(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

d) Løs likningen $(\ln x)^3 + 36 \ln x = (\ln x)\left(\ln x^{13}\right)$.

$$\begin{aligned} \ln x[(\ln x)^2 - \ln x^{13} + 36] &= 0 \\ \ln x[(\ln x)^2 - 13 \ln x + 36] &= 0 \\ x &\in \left\{1, e^4, e^9\right\}. \end{aligned}$$