Dette er foreløpig fasit, ikke fullt løsningsforslag med fortegnsskjema, begrunnelser osv.

Oppgave 1

En bedrift regner at kostnadene ved å produsere x antall enheter av en vare er gitt ved funksjonen

$$K(x) = 300x^2 + 15\,000x + 270\,000, \qquad 0 \leq x \leq 250.$$

(a) Finn et funksjonsuttrykk for grensekostnaden $K'(x)$.

$$\begin{aligned} K'(x) &= \frac{d}{dx}\left(300x^2 + 15\,000x + 270\,000\right) \\ &= 600x + 15\,000 \end{aligned}$$

(b) Finn et funksjonsuttrykk for enhetskostnaden $A(x)$.

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{K(x)}{x} = \frac{300x^2 + 15\,000x + 270\,000}{x} \\ &= 300x + 15\,000 + \frac{270\,000}{x} \end{aligned}$$

(c) Bestem kostnadsoptimum, den x-verdien som gjør enhetskostnaden minimal. Du trenger ikke bestemme hva enhetskostnaden blir.

$$\begin{aligned} A(x) &= K'(x) \\ 300x + 15\,000 + \frac{270\,000}{x} &= 600x + 15\,000 \\ x &= 30 \ (x = -30 \text{ vrakes.}) \end{aligned}$$

(d) Inntekten ved salg av x enheter av varen er i oppstartsfasen gitt ved funksjonen

$$I(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 450x^2 - 5\,000x.$$

I oppstartsfasen går bedriften med underskudd. Bestem den x-verdien som gir minst underskudd.

$$\begin{aligned} P(x) &= I(x) - K(x) \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + 450x^2 - 5\,000x - \left(300x^2 + 15\,000x + 270\,000\right) \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + 150x^2 - 20\,000x - 270\,000 \\ P'(x) &= \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{3}x^3 + 150x^2 - 20\,000x - 270\,000\right) \\ &= -x^2 + 300x - 20\,00 \\ P'(x) &= -x^2 + 300x - 20\,000 = 0 \\ x &\in \{100, 200\} \end{aligned}$$

Minst underskudd for $x = 200$

Oppgave 2

(a) Hva blir verdien av et innskudd på 25 000 kr etter 5 år når renten legges til årlig og er 4% per år?

$$25000 \cdot 1.04^5 = 30416$$

(b) Hva blir verdien av et innskudd på 25 000 kr etter 5 år ved kontinuerlig forrentning når renten er 4% per år?

$$25000 \cdot e^{0.04 \cdot 5} = 32101.$$

(c) Hva blir nåverdien til 25 000 kr som utbetales om 8 år, når renten er 2% per år og legges til årlig?

$$\frac{25\,000}{1.02^8} = 21337$$

(d) Hvor lang tid tar det før et innskudd på 25 000 kr vokser til det dobbelte ved kontinuerlig forrentning, når renten er 4% per år?

$$\begin{aligned} 25\,000 \cdot e^{0.04 \cdot x} &= 50000 \\ &17.3 \text{ år.} \end{aligned}$$

Oppgave 3

En funksjon er gitt ved

$$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x, \; D_f = R.$$

(a) Bestem eventuelle nullpunkter for $f(x)$.

$$\begin{aligned} -x^3 + 9x^2 - 24x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

(b) Bestem eventuelle maksimumspunkt og minimumspunkt for $f(x)$. (Du behøver bare å finne x-koordinater.)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(-x^3 + 9x^2 - 24x\right) &= 0 \\ -3x^2 + 18x - 24 &= 0 \\ \text{min for } x &= 2 \\ \text{maks for } x &= 4 \end{aligned}$$

(c) Bestem $f''(x)$, den andrederiverte til $f(x)$.

$$f''(x) = -6x + 18$$

(d) Bestem likningen for vendetangenten til f-grafen.

$$\begin{aligned} y - \left[-x^3 + 9x^2 - 24x\right]_{x=3} &= \left[-3x^2 + 18x - 24\right]_{x=3} \cdot (x - 3) \\ y + 18 &= 3 \cdot (x - 3) \\ y &= 3x - 27 \end{aligned}$$

Oppgave 4

I en geometrisk rekke er tredje ledd $a_3 = 3$ og sjette ledd $a_6 = 24$.

(a) Bestem rekkens kvotient og rekkens åttende ledd.

$$\begin{aligned} k^3 &= \frac{24}{3} \\ k &= 2 \\ a_8 &= a_6 k^2 = 24 \cdot 2^2 = 96. \end{aligned}$$

(b) Vil denne rekken konvergere eller ikke? Begrunn svaret.

$$\text{divergerer, } k > 1.$$

(c) Bestem en formel som kan brukes til å regne ut summen av rekkens sju første ledd. Du trenger ikke regne ut verdien som bestemmes ved formelen.

$$\begin{aligned} s_7 &= \frac{a_1 \left(k^7 - 1\right)}{k - 1} \\ &= \frac{\frac{3}{2^2} \left(2^7 - 1\right)}{2 - 1} = \frac{381}{4} = 95.25. \end{aligned}$$

: :

Oppgave 5

(a) Løs likningen

$$x^2 - 7x + 12 = 0.$$
$$L = \{3, 4\}$$

(b) Løs likningen

$$\begin{aligned} x &= \frac{4x - 12}{x - 3} \\ x &= 4. \end{aligned}$$

(c) Løs ulikheten

$$\frac{x(x-1)}{x-2} > 0$$
$$L = (0, 1) \cup (2, \infty).$$

(d) Løs ulikheten

$$\frac{x(x-1)}{x-2} \leq 2.$$
$$L = (-\infty, 2)$$

Oppgave 6

(a) Deriver funksjonen

$$f(x) = x^2 e^x$$
$$f'(x) = x^2 e^x + 2xe^x.$$

(b) Deriver funksjonen

$$g(x) = \ln\left(e^x + x^2\right)$$
$$g'(x) = \frac{e^x + 2x}{e^x + x^2}.$$

(c) Deriver funksjonen

$$h(x) = \frac{e^x}{x}.$$
$$h'(x) = \frac{xe^x - 1}{x^2}$$

Oppgave 7

En bedrift starter med produksjon av en ny artikkel. Fra starten av er det en viss «treghet» i produksjonen, og en regner med at den daglige produksjonen vil gå etter modellen

$$N(t) = 1\,000\left(1 - e^{-0{,}5t}\right) \qquad t \geq 0,$$

der $N(t)$ er antall enheter produsert per dag t dager etter produksjonsstart. Vi antar at modellen er korrekt.

(a) Hvor mange artikler vil bli produsert den første dagen?

$$N(1) = [1000 \cdot \left(1 - e^{-0.5t}\right)]_{t=1} = 393.47$$

(b) Hva vil $N(t)$ nærme seg når det går lang tid?

1000