Eksamen 7. desember 2017 | **AR101015 Grunnleggjande Matematikk**

Eksamenstid 4 timar | *Nynorsk*

Kalkulator, lærebok og formelsamling er lov.
Handskrivne notat i lærebok og formelsamling er lov.
Lause ark, med unntak av bokmerke, er ikkje lov.

(a). Alle svar må grunngjevast. Kalkulatoren kan berre brukast til talrekning og til kontroll.

(b). Du skal forklara korleis du tenkjer deg fram til svaret. Det er ikkje eit mål å bruka same metode som eksaminator ville ha brukt. Der er som regel fleire riktige metodar.

(c). Start alltid nytt spørsmål på ny side.

Oppgåve 1 .... *(15%)*

(a) Løys likninga

$$x^2 + 2x = 3$$

Solution: Likninga er ekvivalent med

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Løysing ved formel:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} \\ &= -1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{4+12} \\ &= -1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{4+12} \\ &= -1 \pm 2. \end{aligned}$$

(b) Løys likningane

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$$

Solution: Addisjonsmetoden gjev

$$3x = 3$$

og dermed

$$x = 1$$

Den andre liknanga gjev so

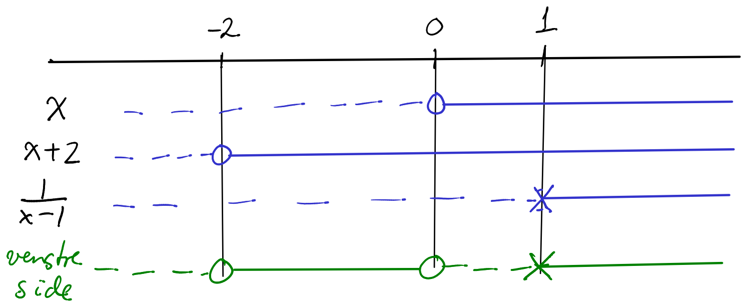
$$y = -x = -1$$

(c) Løys ulikheita

$$\frac{x(x+2)}{x-1} \leq 0$$

Solution:

$$\frac{x(x-2)}{x-1} \leq 0$$



$$x \leq -2 \quad \vee \quad 0 \leq x < 1$$

(d) Løys ulikheita

$$\frac{x(x+2)}{x-1} \geq 2$$

Solution:

$$\frac{x(x+2)}{x-1} \geq 2$$

$$\frac{x(x+2)}{x-1} - 2 \geq 0$$

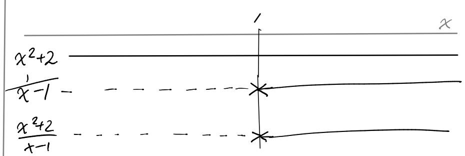
$$\frac{x(x+2) - 2(x-1)}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{x^2+2x-2x+2}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{x^2+2}{x-1} \geq 0$$

x^2+2 har ingen nullpunkt

$x^2+2 > 0$ for alle verdiar av x



$$x > 1$$

(e) Løys likninga

$$(x-2)(x^2-1) = 0$$

Solution: Nullproduktregelen seier at anten har me $x-2=0$ eller $x^2-1=0$. Løysingane vert dermed $x = -1, 1, 2$.

Oppgåve 2 .... *(9%)*

Finn $f'(x)$ når

(a) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \ln x$

> **Solution:**
>
> $$f'(x) = x^2 + \frac{1}{x} \tag{1}$$

(b) $f(x) = e^x x^2$

> **Solution:**
>
> $$\begin{aligned} f'(x) &= e^x x^2 + e^x \cdot 2x \\ &= (2x + x^2)e^x \end{aligned} \tag{2}$$

(c) $f(x) = e^{x^2+x}$

> **Solution:**
>
> $$f'(x) = e^{x^2+x}(2x+1) \tag{3}$$

Oppgåve 3 .... *(24%)*

Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x.$$

Svar på fylgjande spørsmål, og markér svaret både i skissa og i teksta.

(a) Kva ekstremalpunkt (maksimum og minimum) har funksjonen? Bestem x- og y-verdiane til ekstremalpunkta.

(b) Kva nullpunkt har funksjonen?

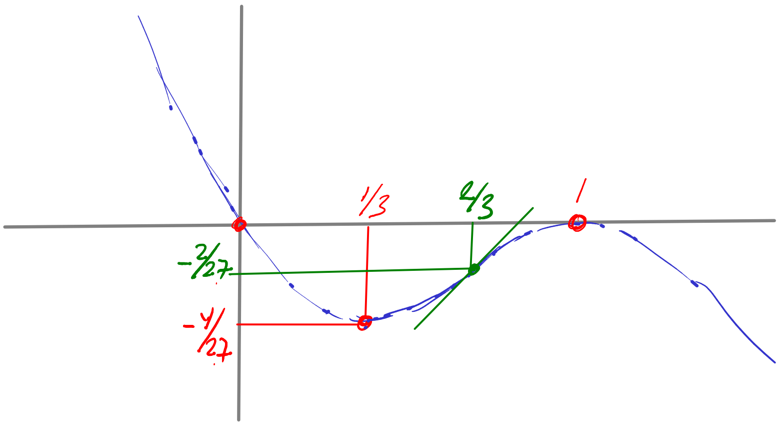
(c) For kva x-verdiar er funksjonen stigande?

(d) For kva x-verdiar er funksjonen positiv? Dvs. $f(x) > 0$.

(e) Finn vendepunktet til $f(x)$. Vis både x- og y-verdien.

(f) Kva skjer med funksjonsverdien $f(x)$ når $x \to \infty$?

> **Solution:**
>
> $$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x \tag{4}$$
> $$f'(x) = -3x^2 + 4x - 1 \tag{5}$$



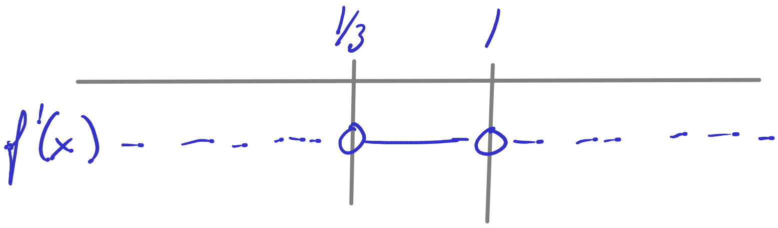
(a). I ekstremalpunkta har me $f'(x) = 0$, eller mao.

$$-3x^2 + 4x - 1 = 0 \tag{6}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{-6} = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3} \tag{7}$$

$$x = 1 \vee x = \frac{1}{3} \tag{8}$$

Me ser av forteiknet på andregradskoeffisienten (-3) at funksjonen definerer ein parabel med botnen opp. Dermed får me forteiknsskjemaet



Dette viser at $f(x)$ synk mot eit minimum ved $x = 1/3$ og stig igjen til eit maksimum ved $x = 1$. Tilsvarande y-verdiar er

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}\right) &= -\frac{1}{3^3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{27} + \frac{2}{9} - \frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{27} + \frac{6}{27} - \frac{9}{27} \\ &= \frac{-1+6-9}{27} = -\frac{-4}{27} \end{aligned} \tag{9}$$

$$f(1) = -1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 = 0 \tag{10}$$

(b). Det er lett å sjå at $x = 0$ fordi

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x = x(-x^2 + 2x - 1) \tag{11}$$

Det er òg lett å sjekka ved formel at andregradsfaktoren har eitt nullpunkt i $x = 1$.

(c). Me ser av forteiknsdiagrammet eller skissa at funksjonen er stigande når $1/3 < x < 1$.

(d). Me ser av skissa at funksjonen er positiv for $x < 0$.

(e). Vendepunktet er bestemt av $f''(x) = 0$. Dette gjev

$$f''(x) = -6x + 4 = 0$$

eller $x = 2/3$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3}\right) &= -\frac{2^3}{3^3} + 2 \cdot \frac{2^2}{3^2} - \frac{2}{3} \\ &= -\frac{8}{27} + \frac{8}{9} - \frac{2}{3} \\ &= -\frac{8}{27} + \frac{24}{27} - \frac{18}{27} \\ &= \frac{-8 + 24 - 18}{27} = -\frac{-2}{27} \end{aligned} \tag{12}$$

(f). Me ser av skissa at $f(x) \to -\infty$ når $x \to \infty$.

Oppgåve 4 .... *(8%)*

Du set 1000 kr. på konto til 2% rente.

(a) Kva er saldoen etter seks år?

Solution: Saldoen etter seks år er $1000 \cdot 1{,}02^6 \approx 1126{,}16$.

(b) Kor mange år tek det før saldoen er 2000 kr.?

Solution: Saldoen etter t år er

$$1000 \cdot 1{,}02^t = 2000$$

Dette er ei likning som me kan forenkla til

$$1{,}02^t = 2,$$

som gjev

$$t \ln 1{,}02 = \ln 2,$$

Ergo

$$t = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}02} \approx 35{,}00$$

Oppgåve 5 .... *(14%)*

Ålesund Dings og Profitt AS sel dingsar. Utgiftene deira er 10 kr. per produsert dings, pluss 1000 kr. dagen i faste utgifter (uavhengig av produksjonsvolumet).

(a). Skriv eit uttrykk for kostnadsfunksjonen $K(x)$.

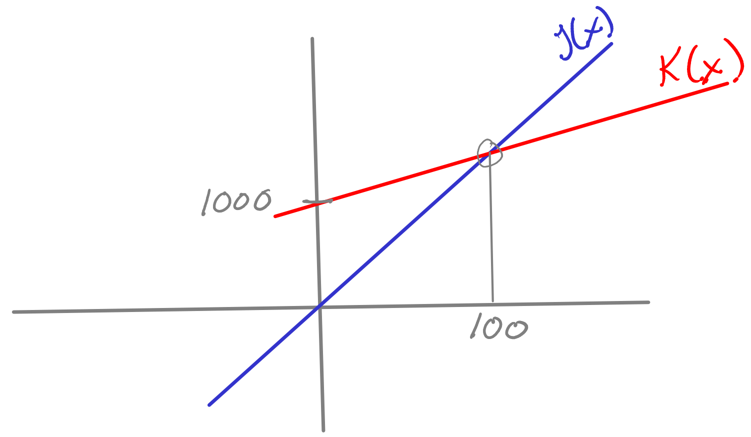
Solution: $K(x) = 10x + 1000$

(b). Kvar dings vert solgt for 20kr. Skriv eit uttrykk for inntektsfunksjonen $I(x)$.

Solution: $I(x) = 20x$

(c). Skissér båe funksjonane $I(x)$ og $K(x)$ i same koordinatsystem. Hugs å merka kva kurve som svarer til kva funksjon i teikninga.

Solution:



(d). Skriv eit uttrykk for profittfunksjonen $P(x)$.

Solution: $P(x) = I(x) - K(x) = 10x - 1000$

(e). Finn produksjonsvolumet x som gjev balanse i drifta (korkje overskot ellet underskot). Vis utrekninga og markér løysinga i skissa frå forrige deloppgåve.

Solution: Balanse i drifta vil seia at $P(x) = 0$, eller mao.

$$10x - 1000 = 0$$

Dette gjev

$$10x = 1000$$

eller

$$x = \frac{1000}{10} = 100$$

Oppgåve 6 . . . . *(15%)*

Ei anna bedrift har kostnadsfunksjonen

$$K(x) = x^2 + 10x + 30.$$

(a). Finn eit uttrykk for grensekostnaden $K'(x)$?

Solution:

$$K'(x) = 2x + 10$$

(b). Finn eit uttrykk for gjennomsnittskostnaden $A(x)$ når bedrifta produserer x dingsar?

Solution:

$$A(x) = x + 10 + \frac{30}{x}$$

Sjå no på tilfellet der bedrifta leverer $x = 10$ dingsar.

(c). Finn gjennomsnittskostnaden for $x = 10$

Solution:

$$A(10) = 10 + 10 + \frac{30}{10} = 23$$

(d). Finn grensekostnaden for $x = 10$

Solution:

$$K'(10) = 2 \cdot 10 + 10 = 30$$

(e). Kva må utsalsprisen vera for at bedriften skal gå med overskudd?

Solution: Han må dekkja gjennomsnittskostnaden, altso minimum 23.

(f). Kva må utsalsprisen vera for at det skal løna seg å auka produksjonen?

Solution: Han må dekkja grensekostnaden, altso minimum 30. (Strengt formelt kan ein argumentera for at svaret er strengt større enn 30, men det føreset ein infitesimal auke. I praksis er ei auke strengt større enn null, og profitten vil faktisk auka også med ein pris på eksakt 30. På dette nivået skal ein godta «minimum 30» og «meir enn 30» som jamngode svar.)

NB. Svara i denne oppgåva må vurderast samla, slik at fylgjefeil ikkje vert straffa. Dei siste to spørsmåla legg vekt på at studenten klarer å tolka matematiske resultat tilbake i det praktiske problemet, og denne evna er i stor grad uavhengig av evna til å rekna rett i spørsmåla over.

Oppgåve 7 . . . . *(15%)*

Per og Kari fekk ein genial idé då dei skreiv sisteårsoppgåve på studiet, og no vil dei starta bedrift. Dei trur at idéen deira kan gje ein profitt på éin million kronar ved utgangen av kvart år i fem år, før andre aktørar kjem etter og profitten forsvinn pga. konkurransen. Diskonteringsraten (rentenivået) er fem prosent.

(a). Kva er noverdien til profitten?

Solution: Noverdien (i millionar) er

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{1{,}05^i} &= \frac{1}{1{,}05}\sum_{i=0}^{4}\frac{1}{1{,}05^i}\\ &= \frac{1}{1{,}05}\frac{\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^5-1}{\frac{1}{1{,}05}-1}\\ &= \frac{\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^5-1}{-0{,}05}\\ &\approx 4{,}329\end{aligned} \tag{13}$$

(b). Sett i staden at dei reknar med å vidareutvikla idéen og oppnå ein profitt på ein million per år til evig tid. Kva er noverdien til den evige profittstraumen?

Solution: Noverdien (i millionar) er

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1{,}05^i} &= \frac{1}{1{,}05}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{1{,}05^i}\\ &= \frac{1}{1{,}05}\frac{-1}{\frac{1}{1{,}05}-1}\\ &= \frac{1}{0{,}05}\\ &= 20.\end{aligned} \tag{14}$$

(c). Det kostar dei fem millionar å starta bedrifta. Kor mange år tek det før dei har tent inn oppstartkostnaden?

Solution: Me skal finna talet t år, før noverdien når fem (millionar). Noverdien etter t år kan skrivast som

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{1{,}05^i} &= \frac{1}{1{,}05}\sum_{i=0}^{t-1}\frac{1}{1{,}05^i}\\ &= \frac{1}{1{,}05}\frac{\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^t-1}{\frac{1}{1{,}05}-1}\\ &= \frac{\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^t-1}{-0{,}05}\end{aligned} \tag{15}$$

Me skal då løysa likninga

$$5 = \frac{\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^t-1}{-0{,}05} \tag{16}$$

eller

$$-0{,}25 = \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^t - 1 \tag{17}$$

eller

$$0{,}75 = \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^t \tag{18}$$

Dette gjev

$$\ln 0{,}75 = t \ln\left(\frac{1}{1{,}05}\right) \tag{19}$$

eller

$$t = \frac{\ln 0{,}75}{\ln\left(\frac{1}{1{,}05}\right)} \tag{20}$$

$$t = -\frac{\ln 0{,}75}{\ln 1{,}05} \approx 5{,}9 \tag{21}$$