NTNU
Kunnskap for ei betre verd

Institutt for (instituttnamn)
Institutt for IKT og Realfag

Eksamensoppgåve i AR101015 Grunnleggjande Matematikk

Fagleg kontakt under eksamen: Hans Georg Schaathun

Tlf.: 70161231

Eksamensdato: 15. mai 2018

Eksamenstid (frå-til): 9-13

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: Kalkulator, lærebok og formelsamling.

Notat i læreboka er lov.

Annan informasjon:

Målform/språk: Nynorsk

Sidetal (utan framside): 2

Sidetal vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Informasjon om trykking av eksamensoppgåve

Originalen er:

1-sidig ☐ **2-sidig** ☐

Merk! Studentane finn sensur i Studentweb. Har du spørsmål om sensuren må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikkje kunne svare på slike spørsmål.

svart/kvit X **fargar ☐**

Skjema for fleire val? ☐

Kalkulator, lærebok og formelsamling er lov.
Handskrivne notat i lærebok og formelsamling er lov.
Lause ark, med unntak av bokmerke, er ikkje lov.

(a). Alle svar må grunngjevast. Kalkulatoren kan berre brukast til talrekning og til kontroll.

(b). Du skal forklara korleis du tenkjer deg fram til svaret. Det er ikkje eit mål å bruka same metode som eksaminator ville ha brukt. Der er som regel fleire riktige metodar.

(c). Start alltid nytt spørsmål på ny side.

Oppgåve 1 . . . . *(12%)*

(a) Løys likninga

$$x^2 - 1 = 2x$$

Solution: Likninga er ekvivalent med

$$x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Løysing ved formel:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} \\ &= 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{4+4} \\ &= 1 \pm \sqrt{2}. \end{aligned}$$

(b) Løys ulikheita

$$x^2 + 2x - 3 \geq 0$$

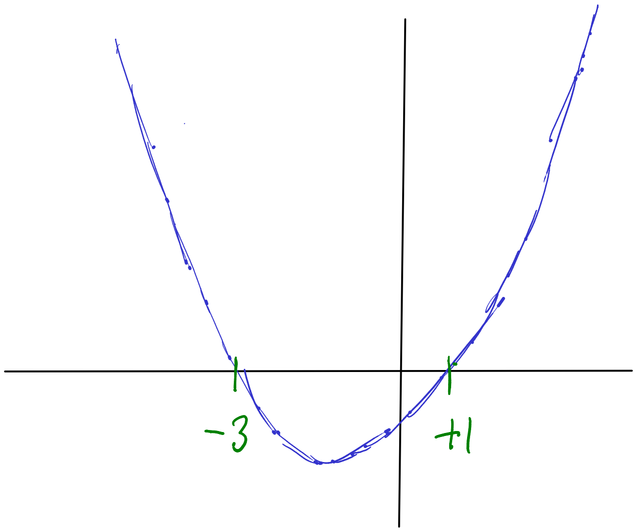
Solution: Me finn nullpunkta åt venstresida

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Løysing ved formel:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} \\ &= -1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{4+12} \\ &= -1 \pm 2. \end{aligned}$$

Dersom me skisserer funksjonen ser me løysinga:



Me ser at $x^2 + 2x - 3 \geq 0$ når $x \leq -3$ eller $x \geq 1$.

(c) Faktoriser polynomet

$$2x^2 - 10x + 12.$$

Solution: Fyrst ser me at

$$2x^2 - 10x + 12 = 2(x^2 - 5x + 6).$$

For å faktorisera parentesuttrykket finn me nullpunkt vha. formel som over. Me får $x = 2$ og $x = 3$. Faktorane er då $x - 2$ og $x - 3$ og heile faktoriseringa er

$$2x^2 - 10x + 12 = 2(x - 2)(x - 3).$$

(d) Løys likninga

$$(x - 2)^2(x + 2)(x - 1) = 0$$

Solution: Venstresida er 0 når ein av faktorane er null (nullproduktregelen). Dermed har me $x = 2$, $x = -2$ eller $x = 1$.

Oppgåve 2 .... *(9%)*

Finn $f'(x)$ når

(a) $f(x) = e^{3x}$

Solution: Me bruker kjerneregelen og skriv $f'(x) = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$

(b) $f(x) = (x^{17} - 1)(x^2 + x + 1)$

Solution: Me bruker bruker produktregelen og skriv

$$\begin{aligned} f'(x) &= \big(\frac{d}{dx}(x^{17}-1)\big)(x^2+x+1) + (x^{17}-1)\big(\frac{d}{dx}(x^2+x+1)\big) \\ &= 17x^{16}(x^2+x+1) + (x^{17}-1)(2x+1) \\ &= 17x^{18} + 17x^{17} + 17x^{16} + 2x^{18} + x^{17} - 2x - 1 \\ &= 19x^{18} + 18x^{17} + 17x^{16} - 2x - 1 \end{aligned}$$

(c) $f(x) = \ln(x^2 - x)$

Solution: Me bruker kjerneregelen og skriv

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - x} \cdot (2x-1) = \frac{2x-1}{x^2-x}$$

Forenkla svara mest mogleg.

Oppgåve 3 . . . . *(25%)*

Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x.$$

Svar på fylgjande spørsmål, og markér svaret både i skissa og i teksta.

(a) Kva nullpunkt har funksjonen?

(b) Kva ekstremalpunkt (maksimum og minimum) har funksjonen? Bestem x- og y-verdiane til ekstremalpunkta.

(c) For kva x-verdiar er funksjonen stigande?

(d) For kva x-verdiar er funksjonen positiv? Dvs. $f(x) > 0$.

(e) Finn vendepunktet til $f(x)$. Vis både x- og y-verdien.

(f) Finn likninga åt vendetangenten for $f(x)$.

Solution:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x \tag{1}$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \tag{2}$$
$$f''(x) = 6x - 6 \tag{3}$$

(a). Det er lett å sjå at $x = 0$ fordi

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) \tag{4}$$

Det er òg lett å sjekka ved formel at andregradsfaktoren har nullpunkt i $x = 1$ og $x = 2$.

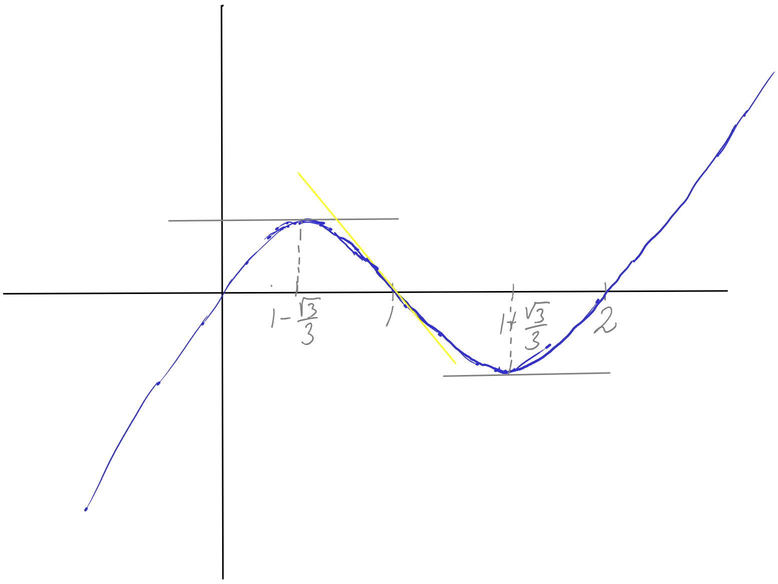
(b). I ekstremalpunkta har me $f'(x) = 0$, eller mao.

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

som gjev

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-24}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Me ser at $f'(x)$ definerer ein parabel med botnen ned, og veit difor at $f(x)$ fyrst stig fram til det fyrste ekstremalpunkt, synk igjen mellom dei to ekstremalpunkta, for til slutt å stiga når x går mot uendeleg. Dette gjev fylgjande skisse:



(c). Som sett over stig $f(x)$ når $x < 1 - \sqrt{3}/3$ og når $x > 1 + \sqrt{3}/3$.

(d). Me ser av skissa at funksjonen er positiv for når $0 < x < 1$ og når $x > 2$.

(e). Vendepunktet er bestemt av $f''(x) = 0$, dvs. når $6x - 6 = 0$ eler $x = 1$. For å finna y-verdien, set me inn i $f(x)$:

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 1 - 3 + 2 = 0. \tag{5}$$

Vendepunktet er altso $(1, 0)$.

(f). Vendetangenten har stigningstal $f'(1) = 3 - 6 + 2 = -1$. Sidan tangenten går gjennom $(1, 0)$, får me likninga $(y - 0) = -1(x - 1)$ eller $y = 1 - x$.

Oppgåve 4 .... *(6%)*

Du set 200 kr. på konto til 1% rente.

(a) Kva er saldoen etter sju år?

Solution: Saldoen etter sju år er $200 \cdot 1{,}01^7 \approx 214{,}43$.

(b) Kor mange år tek det før saldoen er 1000 kr.?

Solution: Saldoen etter t år er

$$200 \cdot 1{,}01^t = 1000$$

Dette er ei likning som me kan forenkla til

$$1{,}01^t = 5,$$

som gjev

$$t \ln 1{,}01 = \ln 5,$$

Ergo

$$t = \frac{\ln 5}{\ln 1{,}01} \approx 161{,}75$$

Det tek altso 162 år før saldoen passerer 1000 kr.

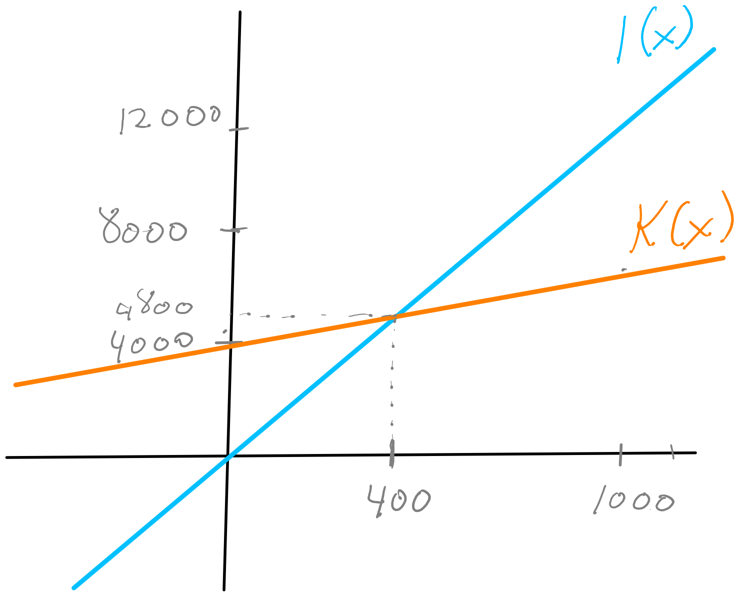
Oppgåve 5 . . . . *(12%)*

Ålesund Dings og Profitt AS sel dingsar. Dei har kostnadsfunksjon $K(x)$ og inntektsfunksjon $I(x)$, der x er talet på solgte dingsar og

$$K(x) = 2x + 4000, \tag{6}$$
$$I(x) = 12x. \tag{7}$$

(a). Skissér båe funksjonane $I(x)$ og $K(x)$ i same koordinatsystem. Hugs å merka kva kurve som svarer til kva funksjon i teikninga.

Solution:



(b). Skriv eit uttrykk for profittfunksjonen $P(x)$.

Solution: $P(x) = I(x) - K(x) = 10x - 4000$

(c). Finn produksjonsvolumet x som gjev balanse i drifta (korkje overskot ellet underskot). Vis utrekninga og markér løysinga i skissa frå deloppgåve (a).

Solution: Balanse i drifta vil seia at $P(x) = 0$, eller mao.

$$10x - 4000 = 0$$

Dette gjev

$$10x = 4000$$

eller

$$x = \frac{4000}{10} = 400$$

Oppgåve 6 .... *(24%)*

Ei anna bedrift har kostnadsfunksjonen

$$K(x) = 100x^2 + 3600x + 250000.$$

(a). Finn eit uttrykk for grensekostnaden $K'(x)$?

Solution:

$$K'(x) = 200x + 3600$$

(b). Finn eit uttrykk for gjennomsnittskostnaden (einingskostnaden) $A(x)$ når bedrifta produserer x dingsar?

Solution:

$$A(x) = 100x + 3600 + \frac{250000}{x}$$

(c). Finn kostnadsoptimum, dvs. den x-verdien som minimerer gjennomsnittskostnaden.

Solution: Me kan anten minimera $A(x)$ vha. vanlege optimeringsteknikkar, eller bruka resultatet at $A(x) = K'(x)$ i kostnadsoptimum. Me gjer det siste:

$$200x + 3600 = 100x + 3600 + \frac{250000}{x}$$

Dette gjev

$$100x = \frac{250000}{x}$$

eller

$$x^2 = \frac{250000}{100} = 2500$$

Dette gjev $x = 50$

Sjå no på tilfellet der bedrifta leverer $x = 25$ dingsar.

(d). Finn gjennomsnittskostnaden for $x = 25$

Solution:

$$A(25) = 100 \cdot 25 + 3600 + \frac{250000}{25} = 2500 + 3600 + 10000 = 16\,100$$

(e). Finn grensekostnaden for $x = 25$

Solution:

$$K'(10) = 200 \cdot 25 + 3600 = 8600$$

(f). Kva må utsalsprisen vera for at bedrifta skal gå med overskot?

Solution: Han må dekkja gjennomsnittskostnaden, altso minimum 16100.

(g). Kva må utsalsprisen vera for at det skal løna seg å auka produksjonen?

Solution: Han må dekkja grensekostnaden, altso minimum 8600.
NB. Svara i denne oppgåva må vurderast samla, slik at fylgjefeil ikkje vert straffa. Dei siste to spørsmåla legg vekt på at studenten klarer å tolka matematiske resultat tilbake i det praktiske problemet, og denne evna er i stor grad uavhengig av evna til å rekna rett i spørsmåla over.

Oppgåve 7 . . . . *(4%)*
Ola startar med pensjonssparing når han er 47 år. Han sparer 10 000 kr. ved starten av kvart år og får 4% rente per år. Når han er 66 år set han inn det 20de og siste beløpet, og når han er 67 år går han av med pensjon. Kor mykje er pensjonskontoen hans verd når han går av med pensjon?

(Me ser bort frå skatt.)

Solution: Sparesaldoen er ei geometrisk rekkje

$$\begin{aligned} S &= \sum_{t=1}^{20} 10\,000 \cdot 1{,}03^t \\ &= 10\,000 \cdot 1{,}03 \cdot \sum_{t=0}^{19} 1{,}03^t \\ &= 10\,000 \cdot 1{,}03 \cdot \frac{1-1{,}03^{20}}{1-1{,}03} \\ &= 276\,764{,}86 \end{aligned} \tag{8}$$

Oppgåve 8 . . . . *(4%)*
Ola er gått av med pensjon i ein alder av 67 år. Han har ein pensjonssaldo på 100 000 kr. som han ynskjer å bruka på ein annuitet over ti år, dvs. han skal ha ein fast utbetaling med same beløp kvart år frå og med han er 68 år til og med 77 år. Han har 4% rente på pensjonskontoen. Kor mykje får han utbetalt per år?

(Me ser bort frå skatt.)

Solution: Ola har råd til ein annuitet på $S = 100\,000$ kr. i noverdi. Dersom han får x kr. per år, kan noverdien skrivast som rekkja

$$\begin{aligned} S &= \sum_{t=1}^{10} x \cdot \left(\frac{1}{1{,}03}\right)^t \\ &= \frac{x}{1{,}03} \cdot \sum_{t=0}^{9} \left(\frac{1}{1{,}03}\right)^t \\ &= \frac{x}{1{,}03} \cdot \frac{1-1{,}03^{-10}}{1-1{,}03^{-1}} \\ &= \frac{x}{1{,}03} \cdot 8{,}7861 \end{aligned} \tag{9}$$

No kan me løysa likninga

$$100\,000 = \frac{x}{1{,}03} \cdot 8{,}7861 \tag{10}$$

og skriva

$$\frac{100\,000 \cdot 1{,}03}{8.7861} = x \tag{11}$$

eller

$$x = 11\,723{,}06 \tag{12}$$

Oppgåve 9 .... *(4%)*

Ola skriv testamente. Han vil setja av ein sum til eit legat som skal betala ut 10 000 kr. per år til Foreininga for Heimlause Kattar for all framtid. Den fyrste summen vert utbetalt i det legatet vert oppretta. Han reknar med eit rentenivå på 3% per år. Kor mykje startkapital treng legatet for å kunne betala den årlege summen?

(Me ser bort frå skatt.)

Solution: Problemet svarer til å finna noverdien på den uendelege pengestraumen. Ei utbetaling etter t år har noverdi

$$10\,000 \cdot \left(\frac{1}{1{,}03}\right)^t$$

Verdien på pengestraumen er då den uendelege rekkja

$$\sum_{t=0}^{\infty} 10\,000 \cdot \left(\frac{1}{1{,}03}\right)^t = 10\,000 \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1{,}03}\right)^t = 10\,000 \cdot \frac{1}{0{,}03} \approx 333\,333{,}33.$$

Legatet treng altso $\frac{1}{3}$ million kr.