AR101015 Grunnleggjande Matematikk

Hans Georg Schaathun

Ordinær eksamen 18. desember 2018
Revidert 10. januar 2019

(a). Enkel kalkulator er einaste tillatne hjelpemiddel.

(b). Svar på oppgåvene med tanke på å forklara medstudentane korleis du tenkjer og overtyda dei om at løysinga er rett.

(c). Det er ikkje eit mål å velja same løysingsmetode som eksaminator. Der er som regel mange vegar til målet.

(d). Les nøye gjennom heile oppgåvesettet før du tek til å løysa oppgåvene.

Merknad 1. *Oppgåvesettet går ut frå at karakterane vert sett ut frå prosentdel riktige svar, med fylgjande grensar: $E \geq 40\%$, $D \geq 50\%$, $C \geq 60\%$, $B \geq 80\%$, $A \geq 90\%$.*

Merknad 2. *Oppgåve 1–3 (75% av settet) er typiske oppgåver som har vore vanleg på eksamen tidlegare og som har vore tungt vektlagt i undervisinga. Det er tydeleg kommunisert til studentane at full kontroll på desse tre temaa er tilstrekkeleg til ein C. Oppgåve 4–5 er oppgåvetypar som er sjeldnare på eksamen og meint for dei studentane som tykkjer at C er ein dårleg karakter.*

Merknad 3. *Ein skal leggja stor vekt på at studentane forstår det praktiske problemet i tekstoppgåvene og ser samanhengen mellom matematikken og røynda. Dette har vore sterkt vektlagt i undervisinga. Det samme gjeld argumentasjonen, som skal vera retta mot likemenn (medstudentar). Kandidatane skal visa at dei kan kommunisera løysinga til folk som har liknande kompetanse som dei sjølv, og ikkje (berre) til eksamenssensorar.*

Oppgåve 1 .... *(25%)*

Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x.$$

Svar på fylgjande spørsmål, og markér svaret både i skissa og i teksta.

(a) Kva ekstremalpunkt (maksimum og minimum) har funksjonen? Bestem x- og y-verdiane til ekstremalpunkta.

Solution: Den deriverte er gjeven som

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 2$$

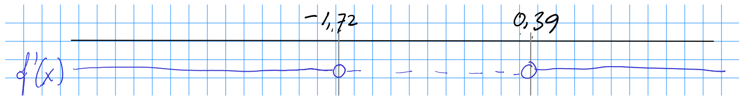
I ekstremalpunkta har me $f'(x) = 0$, eller mao.

$$3x^2 + 4x - 2 = 0$$

Formelen for andregradslikningar gjev oss

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 24}}{6} = -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{40}}{6}.$$

Dvs. anten $x \approx 0{,}39$ eller $x \approx -1{,}72$.
Me ser av forteiknet på andregradskoeffisienten (3) at funksjonen definerer ein parabel med botnen ned. Dermed får me forteiknsskjemaet



Dette viser at $f(x)$ stig mot eit maksimum ved $x \approx 0{,}39$ og synk igjen til eit minimum ved $x \approx -1{,}72$. Tilsvarande y-verdiar er

$$f\big(0{,}39\big) = -0{,}417$$
$$f\big(-1{,}72\big) = 4{,}27$$

(b) Kva nullpunkt har funksjonen?

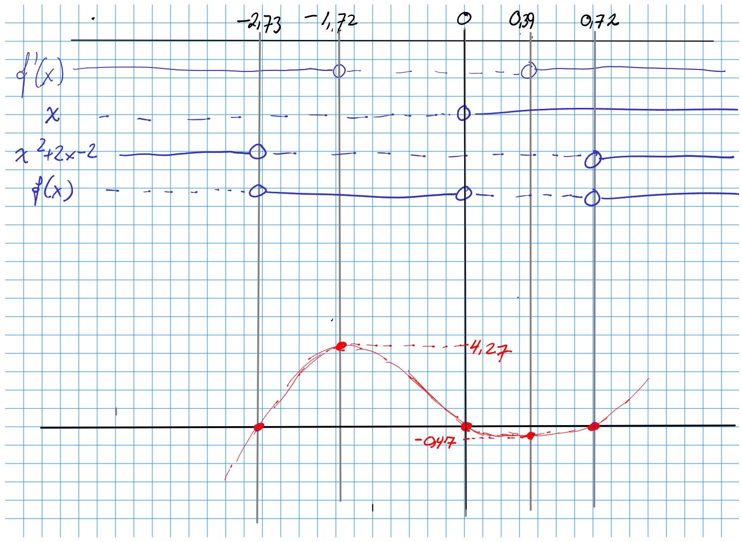
Solution: Det er lett å sjå at $x = 0$ er nullpunkt fordi

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x = x(x^2 + 2x - 2) \tag{1}$$

Det er òg lett å sjekka ved formel at andregradsfaktoren har to nullpunkt i

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8}}{2} = -1 \pm \frac{\sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

Dei tre nullpunkta er altso $x \approx -2{,}73$, $x = 0$ og $x \approx 0{,}73$.
No har me totalt fem punkt på kurva og det er enkelt å teikna ei skisse.



Merknad 4. *Forteiknsdiagramma er ikkje naudsynte for å skissera funksjonen. Løysinga, slik ho er gjort med forteiknsdiagram, er meint som eit døme på korleis mange studentar løyser oppgåva godt.*

(c) For kva x-verdiar er funksjonen stigande?

Solution: Sjå forteiknsdiagrammet over. Funksjonen er stigande for

$$x < -\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{10}}{3} \approx -1{,}72,$$

og for

$$x > -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{10}}{3} \approx 0{,}39,$$

(d) Finn vendepunktet til $f(x)$. Vis både x- og y-verdien.

Solution: Vendepunktet er bestemt av $f''(x) = 0$. Dette gjev

$$f''(x) = 6x + 4 = 0$$

eller $x = -2/3$.

$$\begin{aligned} f\big(-\frac{2}{3}\big) &= \Big(-\frac{2}{3}\Big)^3 + 2\Big(-\frac{2}{3}\Big)^2 - 2\Big(-\frac{2}{3}\Big) \\ &= -\frac{2^3}{3^3} + \frac{2\cdot 2^2}{3^2} + \frac{2\cdot 2}{3} \\ &= -\frac{8}{27} + \frac{8}{9} + \frac{4}{3} \\ &= -\frac{8}{27} + \frac{24}{27} + \frac{36}{27} \\ &= \frac{-8+24+36}{27} = \frac{52}{27} \approx 1{,}93. \end{aligned} \tag{2}$$

Vendepunktet er altso $(-2/3, 52/27)$.

(e) Finn likninga for vendetangenten og teikn vendetangenten i skissa.

Solution: Vendetangenten er ein rett line med likning $y = ax + b$. Me må finna a og b. Stigningstalet a er gjeve ved den deriverte.

$$\begin{aligned} f'(-2/3) &= 3\big(-\frac{2}{3}\big)^2 + 4\big(-\frac{2}{3}\big) - 2 \\ &= \frac{4}{3} - \frac{8}{3} - 2 = -\frac{10}{3}. \end{aligned} \tag{3}$$

Me har altso likninga

$$y = -\frac{10}{3}x + b.$$

Me kan finna b-en ved å setja inn (x, y)-verdiane for vendepunktet som ligg på lina:

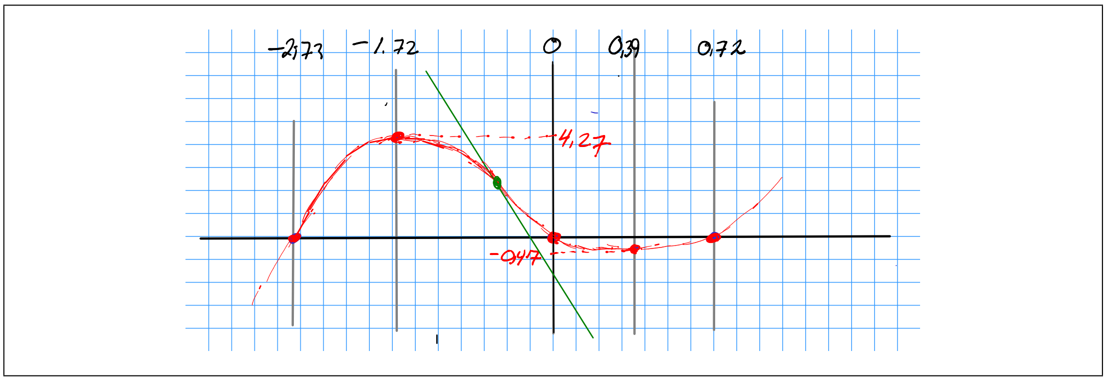
$$\frac{52}{27} = -\frac{10}{3}\cdot\big(-\frac{2}{3}\big) + b.$$

Då får me

$$b = \frac{52}{27} - \frac{10}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{-52+60}{27} = -\frac{8}{27}.$$

Då vert likninga

$$y = -\frac{10}{3}x - \frac{8}{27}.$$



Merknad 5. *Merk at skissa ikkje er teikna i skala. Der er ingen grunn for å krevja at skissa skal vera i skala.*

Den siste skissa er endra i forhold til den andre, for at vendetangenten skal sjå nokonlunde rett ut. Eit perfekt svar ville nok ha teikna heile skissa på nytt i skala.

(f) Kva skjer med funksjonsverdien $f(x)$ når $x \to \infty$?

Solution: Når $x \to \infty$ dominerer tredjegradsleddet x^3 som går mot uendeleg. Difor får me $f(x) \to \infty$.

Oppgåve 2 . . . . *(25%)*

Ålesund Dings og Profitt AS sel dingsar. Utgiftene deira er 40 kr. per produsert dings, pluss 6000 kr. dagen i faste utgifter (uavhengig av produksjonsvolumet).

(a). Skriv eit uttrykk for kostnadsfunksjonen $K(x)$.

Solution: Produksjon av x einingar à 40 kr. gjev variable kostnadar på $40x$. Når me legg til faste kostnader får me

$$K(x) = 40x + 6000$$

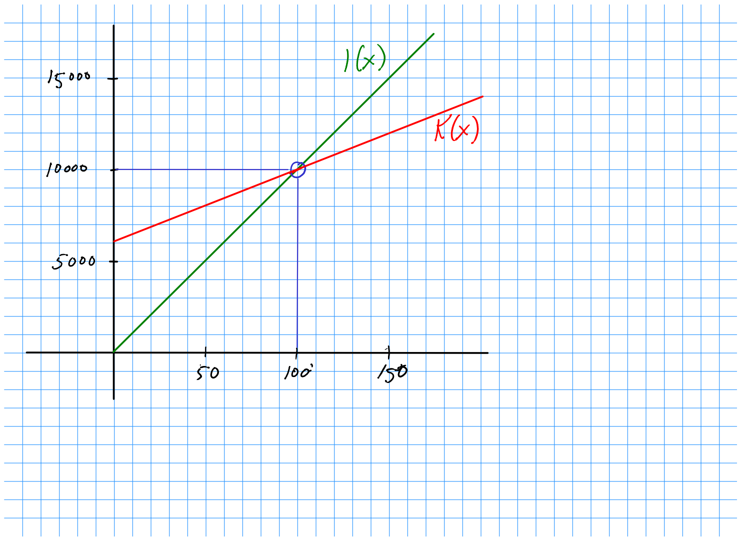
(b). Kvar dings vert solgt for 100kr. Skriv eit uttrykk for inntektsfunksjonen $I(x)$.

Solution: Eit sal på x einingar à 100 kr. gjev inntektsfunksjonen

$$I(x) = 100x$$

(c). Skissér båe funksjonane $I(x)$ og $K(x)$ i same koordinatsystem. Hugs å merka kva kurve som svarer til kva funksjon i teikninga.

Solution:



(d). Skriv eit uttrykk for profittfunksjonen $P(x)$.

Solution: Profitten er inntekt fråtrekt kostnad, altso

$$P(x) = I(x) - K(x) = 60x - 6000$$

(e). Finn produksjonsvolumet x som gjev balanse i drifta (korkje overskot ellet underskot). Vis utrekninga og markér løysinga i skissa frå forrige deloppgåve.

Solution: Balanse i drifta er det same som null profitt, altso

$$0 = P(x) = 60x - 6000$$

Me kan løysa likninga, som fylgjer

$$60x = 6000$$

Når me deler på 60 får me

$$x = 100$$

Bedrifta går i balanse når dei produserer 100 einingar.

Ei anna bedrift har kostnadsfunksjonen

$$K(x) = 0{,}1 \cdot x^2 - 2x + 120.$$

(f). Finn eit uttrykk for grensekostnaden $K'(x)$.

Solution: Grensekostnaden er det same som den deriverte av kostnadsfunksjonen:

$$K'(x) = 0{,}2x - 2$$

Sjå no på tilfellet der bedrifta leverer $x = 100$ dingsar.

(g). Finn grensekostnaden for $x = 100$

Solution: Me set inn i funksjonen:

$$K'(100) = 0{,}2 \cdot 100 - 2 = 18$$

Grensekostnaden er altso 18 kroner per eining.

(h). Kva må utsalsprisen vera for at det skal løna seg å auka produksjonen?

Solution: Prisen må meir enn dekkja grensekostnaden, altso overstiga 18 kroner per eining.

Oppgåve 3 .... *(25%)*

Denne oppgåva dreier seg om renterekning og finansmatematikk.

(a) Du set 500 kr. på konto til 3% rente. Kva er saldoen etter seks år?

Solution: Saldoen etter seks år er $500 \cdot 1{,}03^6 = 597{,}03$ kroner.

(b) Du set 2000 kr. på konto til 2,4% rente. Kor mange år tek det før saldoen er fordobla?

Solution: Lat t vera tida det tek å dobla saldoen. Etter t år er saldoen altso 4000 kroner, eller $2000 \cdot 1{,}024^t$ kroner. Dette gjev likninga

$$4000 = 2000 \cdot 1{,}024^t.$$

Me forenklar ved å dela på 2000, og får

$$2 = 1{,}024^t.$$

Ved å ta logaritmen på båe sider får me

$$\ln 2 = \ln 1{,}024^t,$$

eller

$$\ln 2 = t \ln 1{,}024,$$

og

$$t = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}024} \approx 29{,}23.$$

Sidan me berre får renter på slutten av året, går det 30 år før saldoen faktisk bikkar 4000 kroner.

Merknad 6. *Løysingsforslag er omstendeleg. For mange vil det vera rett å skriva knappare og det er ok.*

Ein skal ikkje leggja for stor vekt på å runda opp til næraste heiltal; det må vera greitt å gje svaret med 1–2 desimalar i eit matematikkurs.

(c) Du sparer 1000 kr. i året på ein sparekonto med 3% rente. Kor mykje har du på sparekontoen når du har sett inn det tolvte beløpet?

Solution: Me set inn tolv tusenlappar som får renter frå 0 til 11 gongar. Det gjev summen

$$S_{12} = 1000 \cdot 1{,}03^{11} + 1000 \cdot 1{,}03^{10} + \cdots + 1000 \cdot 1{,}03^1 + 1000 \cdot 1{,}03^0$$

for saldoen etter det tolvte beløpet er sett inn. Dette er ei geometrisk rekkje som me kan skriva om vha. formelen

$$S_{12} = 1000 \cdot \frac{1{,}03^{12} - 1}{1{,}03 - 1},$$

og me kan rekna ut på kalkulator

$$S_{12} = 14\,192{,}03.$$

Saldoen vert altso 14 192,03 kroner.

Merknad 7. *Ein kan gjerne skriva rekkja med summeteikn. Det er ikkje gjort her for å understrekja at det ikkje er avansert notasjon som er poenget, men å kjenna att formen på summen.*

(d) Annanias er 67 år og går av med pensjon. Han vil bruka ein del av pensjonsformuen på ein annuitet. Han vil ha ei årleg utbetaling på 100 000 kroner frå og med det året han fyller 68 til og med det året han fyller 77. Finn noverdien av denne annuiteten når rentenivået er 3,5%.

Solution: Annanias skal ha ti utbetalingar, den fyrste om eitt år og den siste om ti år. For å finna noverdien, må me diskontera med ein faktor på 1/1,035 per år. Noverdien er altso summen

$$S_{10} = 100\,000 \cdot \left(\frac{1}{1{,}035}\right)^1 + 100\,000 \cdot \left(\frac{1}{1{,}035}\right)^2 + \cdots + 100\,000 \cdot \left(\frac{1}{1{,}035}\right)^9 + 100\,000 \cdot \left(\frac{1}{1{,}035}\right)^{10}.$$

Me trekk felles faktorar utanfor ein parentes:

$$S_{10} = 100\,000 \cdot \frac{1}{1{,}035} \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{1{,}035}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{1}{1{,}035}\right)^8 + \left(\frac{1}{1{,}035}\right)^9\right).$$

Dette er ei geometrisk rekkje som me kan skriva om vha. formelen

$$S_{10} = 100\,000 \cdot \frac{1}{1{,}035} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1{,}035}\right)^{10} - 1}{\left(\frac{1}{1{,}035}\right) - 1},$$

og me kan rekna ut på kalkulator

$$S_{10} = 831\,660{,}53.$$

Saldoen vert altso 831 660,53 kroner.

(e) Fredrik vurderer å kjøpa opp *startup*-bedrifta StarIdea. Han reknar med at bedrifta kan tena 10 millionar kroner i året til evig tid. Kor mykje kan Fredrik maksimalt vera viljug til å betala for StarIdea? Han reknar med eit rentenivå på 5%.

Solution: Fredrik ser for seg ein inntekt på 10 mNOK kvart år. Noverdien (i mNOK) av inntekta i år i er då

$$10 \cdot \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^i.$$

Det er ikkje spesifisert i oppgåva om me skal rekna med inntekt umiddelbart (år 0). Me går (vilkårleg) ut frå at me skal det. Då er noverdien av bedrifta

$$S = 10 \cdot \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^0 + 10 \cdot \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^1 + 10 \cdot \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^3 + \cdots,$$

eller

$$S = 10 \cdot \left(\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^0 + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^1 + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^2 + \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^3 + \cdots\right).$$

Dette gjev ei geometrisk rekkje som me kan skriva som

$$S = 10 \cdot \frac{\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{\infty} - 1}{\left(\frac{1}{1{,}05}\right) - 1}.$$

Sidan vekstfaktoren er mindre enn éin, forsvinn leddet som er opphøgd i ∞, og me får

$$S = 10 \cdot \frac{-1}{\left(\frac{1}{1{,}05}\right) - 1}.$$

Me kalkulator finn me at noverdien er $S = 210$ mNOK.

Merknad 8. *Sidan standardkalkulatorane handterer parentesuttrykk som det som er gjeve for S relativt pent og oversiktlig, er der ingen grunn for å forenkla vidare på papir. Det er lov, men det er hensiktsstridig å krevja det.*

Oppgåve 4 .... *(10%)*

Gjennomsnittskostnaden for ei viss bedrift er gjeven som funksjonen

$$A(x) = 0{,}05 \cdot x + 2 + \frac{100}{x}.$$

Drøft og skisser funksjonen $A(x)$. Svar på fylgjande spørsmål, og illustrer svara med markering i skissa.

(a). Kor mykje må bedrifta produsera for å oppnå lågast mogleg kostnad per eining?

(b). Kor mykje kostar det å produsera éi eining, når produksjonen er billigst mogleg?

(c). Markér asymptotane i skissa.

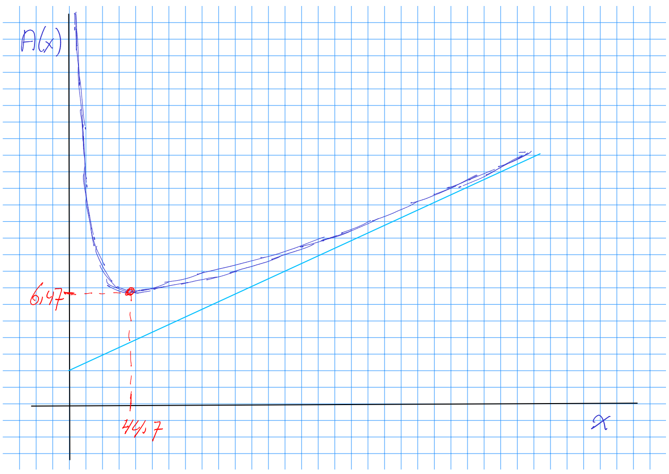
(d). Finn matematiske uttrykk (likningar eller funksjonsuttrykk) for asymptotane.

Solution: Det er enklast å skissare asymptotane fyrst. Me ser at når $x = 0$ er $A(x)$ udefinert, og når $x \to 0$ vert det siste leddet uendeleg stort og $A(x) \to \infty$.

Den horisontale asymptoten er altso $x = 0$ (y-aksen).

Når $x \to \infty$ vert det siste leddet uendeleg lite, og $A(x) \to 0{,}05x + 2$.

Kurva har altso skråasymptote $y = 0{,}05x + 2$. Denne teiknar me i skissa.



Når me har asymptotane, kan me teikna ein relativt god grovskisse av funksjonen, som vist. Sidan sisteleddet $100/x$ er positivt for positiv x, ligg kurva over asymptoten. Det einaste som gjenstår er å rekna ut minimumspunktet.

Me deriverer og finn

$$A'(x) = 0{,}05 - \frac{100}{x^2}.$$

Når me set $A'(x) = 0$ og løyser får me

$$0{,}05 = \frac{100}{x^2}, \tag{4}$$

$$x^2 = \frac{100}{0{,}05} = 2000, \tag{5}$$

$$x = \sqrt{2000} \approx 44{,}72. \tag{6}$$

Kostnadsoptimumet finn me når produksjonen er $x = 44{,}7$ einingar.

Einingskostnaden i optimum er

$$A(\sqrt{2000}) \approx 6{,}47.$$

Produksjonen kostar altso 6,47 per eining i optimum.

Merknad 9. *Notasjonen $A(x) \to 0{,}05x + 2$ er ikkje kosher, men han er brukt her fordi han er meiningsfull, og det bør vera nok i denne typen kurs.*

Puritanske matematikarar vil skriva $A(x) - 0{,}05x + 2 \to 0$. Det er òg lov.

Merknad 10. *Ein kan bruka regelen om at grensekostnad er lik gjennomsnittskostnad i optimum. Her er den generelle metoden brukt, for å understreka at ein ikkje treng å hugsa spesielle reglar for å løysa oppgåva.*

Merknad 11. *Det er mogleg å teikna ei god skisse utan å teikna asymptotane. Eit typisk 50%-svar gjev ei grovskisse utan synlege feil og korrekt utrekning på a-b, men nemner ikkje asymptotane.*

Dersom skissa tydeleg viser den asymptotiske utviklinga, sjølv om asymptotane ikkje er komenterte, bør svaret gje meir enn halv uttelling (60–70%).

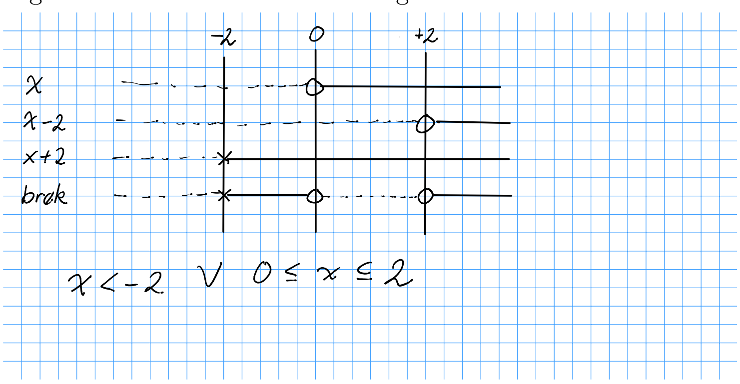
Ei god og rett skisse skal ei viss uttelling (kanskje $\approx 20\%$) sjølv om alle delspørsmåla manglar svar.

Oppgåve 5 .... *(15%)*

(a) Løys ulikheita

$$\frac{x(x-2)}{x+2} \leq 0.$$

Solution: Det greiaste er å teikna forteiknsdiagram



Me konkluderer med at anten har me $x < -2$ eller $0 \leq x \leq 2$.

(b) Løys ulikheita

$$\frac{x(x-2)}{x+2} \geq 2.$$

Solution: Me må fyrst forenkla ulikheita slik at me får null på den eine sida, og ein brøk på den andre. Fyrst,

$$\frac{x(x-2)}{x+2} - 2 \geq 0$$

Her må me utvida brøken

$$\frac{x(x-2)}{x+2} - \frac{2(x+2)}{x+2} \geq 0$$

eller

$$\frac{x(x-2) - 2(x+2)}{x+2} \geq 0$$

eller

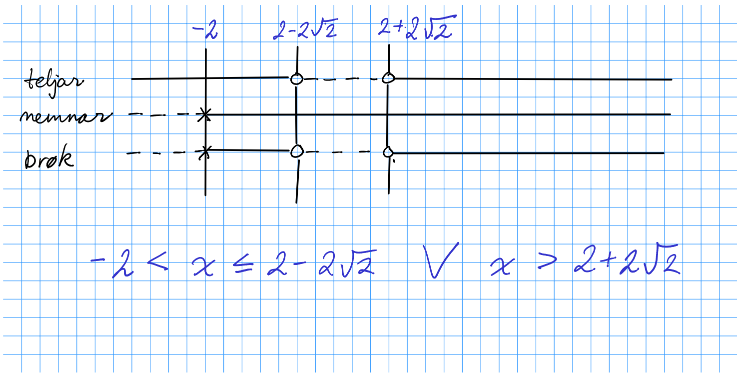
$$\frac{x^2 - 2x - 2x - 4}{x+2} \geq 0$$

eller

$$\frac{x^2 - 4x - 4}{x+2} \geq 0$$

No kan me teikna forteiknsdiagram med to faktorar. Teljaren har to nullpunkt som me finn med formelen

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{2}$$



Me konkluderer med at anten har me $-x < x \leq 2 - 2\sqrt{2}$ eller $x \geq 2 + 2\sqrt{2}$.

(c) Finn $f'(x)$ når $f(x) = e^{x^4 - x^2 + 2}$.

Solution: Her bruker me kjerneregelen med $u(x) = x^4 - x^2 + 2$ som kjerne. Me har $u'(x) = 4x^3 - 2x$. Den ytre funksjonen e^u er sin eigen derivert, og me får

$$f'(x) = e^{x^4 - x^2 + 2} \cdot (4x^3 - 2x).$$

(d) Løys likninga

$$e^{2x} - 4e^x + 4 = 0.$$

Solution: Me kan skriva likninga som

$$(e^x)^2 - 4(e^x) + 4 = 0.$$

Dersom me skriv $y = e^x$ har me

$$y^2 - 4y + 4 = 0$$

og kan løysa for y. Formelen gjev

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2.$$

Me har altso $e^x = 2$ og dermed $x = \ln 2$.