AR101015 Grunnleggjande Matematikk

Hans Georg Schaathun

Ordinær eksamen 27. mai 2019
Revidert 23. april 2019

Sensorvegleiing 27. mai 2019 **AR101015 Grunnleggjande Matematikk**
Eksamenstid 4 timar *Nynorsk*

(a). Enkel kalkulator er einaste tillatne hjelpemiddel.

(b). Svar på oppgåvene med tanke på å forklara medstudentane korleis du tenkjer og overtyda dei om at løysinga er rett.

(c). Det er ikkje eit mål å velja same løysingsmetode som eksaminator. Der er som regel mange vegar til målet.

(d). Les nøye gjennom heile oppgåvesettet før du tek til å løysa oppgåvene.

Merknad 1. *Oppgåvesettet går ut frå at karakterane vert sett ut frå prosentdel riktige svar, med fylgjande grensar:* $E \geq 40\%$, $D \geq 50\%$, $C \geq 60\%$, $B \geq 80\%$, $A \geq 90\%$.

Merknad 2. *Oppgåve 1–3 (80% av settet) er typiske oppgåver som har vore vanleg på eksamen tidlegare og som har vore tungt vektlagt i undervisinga. Det er tydeleg kommunisert til studentane at full kontroll på desse tre temaa er tilstrekkeleg til ein C. Oppgåve 4–5 er oppgåvetypar som har vore sjeldnare på eksamen og meint for dei studentane som tykkjer at C er ein dårleg karakter.*

Merknad 3. *Ein skal leggja stor vekt på at studentane forstår det praktiske problemet i tekstoppgåvene og ser samanhengen mellom matematikken og røynda. Dette har vore sterkt vektlagt i undervisinga. Det samme gjeld argumentasjonen, som skal vera retta mot likemenn (medstudentar). Kandidatane skal visa at dei kan kommunisera løysinga til folk som har liknande kompetanse som dei sjølv, og ikkje (berre) til eksamenssensorar.*

Oppgåve 1 . . . . *(25%)*

Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = -x^3 + x^2 + x.$$

Svar på fylgjande spørsmål, og markér svaret både i skissa og i teksta.

(a) Kva ekstremalpunkt (maksimum og minimum) har funksjonen? Bestem x- og y-verdiane til ekstremalpunkta.

Solution: Den deriverte er gjeven som

$$f'(x) = -3x^2 + 2x + 1$$

I ekstremalpunkta har me $f'(x) = 0$, eller mao.

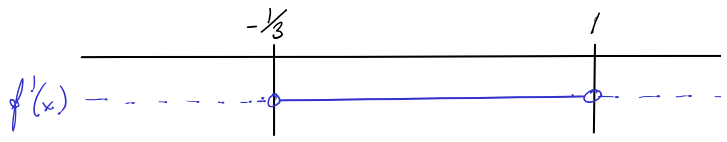
$$-3x^2 + 2x + 1 = 0$$

Formelen for andregradslikningar gjev oss

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{-6} = \frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}.$$

Dvs. anten $x = 1$ eller $x = -1/3$.

Me ser av forteiknet på andregradskoeffisienten (-3) at funksjonen definerer ein parabel med botnen opp. Dermed får me forteiknsskjemaet



Dette viser at $f(x)$ synk mot eit minimum ved $x = -1/3$ og stig igjen til eit maksimum ved $x = 1$. Tilsvarande y-verdiar er

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -0{,}185$$
$$f(1) = 1.$$

(b) Kva nullpunkt har funksjonen?

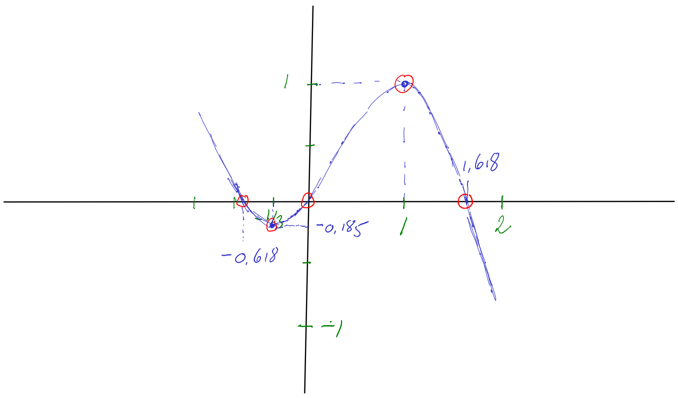
Solution: Det er lett å sjå at $x = 0$ er nullpunkt fordi

$$f(x) = -x^3 + x^2 + x = x(-x^2 + x + 1) \tag{1}$$

Det er òg lett å sjekka ved formel at andregradsfaktoren har to nullpunkt i

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Dei tre nullpunkta er altso $x \approx -0{,}618$, $x = 0$ og $x \approx 1{,}618$.
No har me totalt fem punkt på kurva og det er enkelt å teikna ei skisse.



Merknad 4. *Skissa er basert på dei fem punkta, som er markerte i raudt. Desse fem punkta skal vera rett markerte i skissa, og kurva skal vera glatt (som polynomfunksjon).*

(c) For kva x-verdiar er funksjonen stigande?

Solution: Sjå forteiknsdiagrammet over. Funksjonen er stigande for for $-1/3 < x < 1$.

(d) Finn vendepunktet til $f(x)$. Vis både x- og y-verdien.

Solution: Vendepunktet er bestemt av $f''(x) = 0$. Dette gjev

$$f''(x) = -6x + 2 = 0$$

eller $x = 1/3$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}\right) &= -\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{27} + \frac{3}{27} + \frac{9}{27} \\ &= \frac{11}{27} \approx 0{,}407. \end{aligned} \tag{2}$$

Vendepunktet er altso $(1/3, 11/27)$.

(e) Finn likninga for vendetangenten og teikn vendetangenten i skissa.

Solution: Vendetangenten er ei rett line med likning $y = ax + b$. Me må finna a og b. Stigningstalet a er gjeve ved den deriverte.

$$\begin{aligned} f'(1/3) &= -3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right) + 1 \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{4}{3}. \end{aligned} \tag{3}$$

Me har altso likninga

$$y = \frac{4}{3}x + b.$$

Me kan finna b-en ved å setja inn (x, y)-verdiane for vendepunktet som ligg på lina:

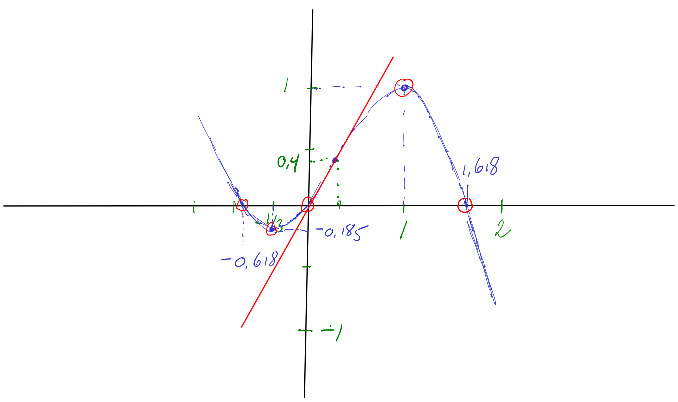
$$\frac{11}{27} = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + b.$$

Då får me

$$b = \frac{11}{27} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{27}.$$

Då vert likninga

$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{27}.$$



(f) Kva må skje med x for at funksjonsverdien skal gå mot uendeleg ($f(x) \to \infty$)?

Solution: Når $x \to \pm\infty$ dominerer tredjegradsleddet $-x^3$. Då får me $f(x) \to \infty$ når $x \to -\infty$ og $f(x) \to -\infty$ når $x \to \infty$. Konklusjonen er at x må gå mot minus uendeleg.

Oppgåve 2 . . . . *(25%)*

Denne oppgåva dreier seg om renterekning og finansmatematikk.

(a) Du set 700 kr. på konto til 4% rente. Kva er saldoen etter fem år?

> **Solution:** Saldoen etter fem år er $700 \cdot 1{,}04^5 = 921{,}15$ kroner.

(b) Stortinget planlegg ein investering på 500 millionar kroner til neste år. Kva er noverdien på denne investeringa når rentenivået er 4%?

> **Solution:** Noverdien (i mNOK) er
>
> $$\frac{500}{1.04} = 480{,}8.$$

(c) Du set 1000 kr. på konto til 4% rente. Kor mange år tek det før saldoen når 2500 kr.?

> **Solution:** Lat t vera tida det tek å nå ynskt saldo. Etter t år er saldoen altso 2500 kroner, eller $1000 \cdot 1{,}04^t$ kroner. Dette gjev likninga
>
> $$2500 = 1000 \cdot 1{,}04^t.$$
>
> Me forenklar ved å dela på 1000, og får
>
> $$2{,}5 = 1{,}04^t.$$
>
> Ved å ta logaritmen på bâe sider får me
>
> $$\ln 2{,}5 = \ln 1{,}04^t,$$
>
> eller
>
> $$\ln 2{,}5 = t \ln 1{,}04,$$
>
> og
>
> $$t = \frac{\ln 2{,}5}{\ln 1{,}04} \approx 23{,}36.$$
>
> Sidan me berre får renter på slutten av året, går det 24 år før saldoen faktisk bikkar 2500 kroner.

Merknad 5. *Løysingsforslaget er omstendeleg. For mange vil det vera greitt å skriva knappare og det er ok.*

Ein skal ikkje leggja for stor vekt på å runda opp til næraste heiltal; det må vera greitt å gje svaret med 1–2 desimalar i eit matematikkurs.

(d) Johanna sparer til pensjon frå ho er 37 til 66, dvs. ho set inn 30 årlege beløp. Pensjonskontoen har 4% avkasting (rente) i året og ho set inn 30 000 kr. i året. Kva er pensjonssaldoen når ho er 67? (Då har det siste innskotet fått renter éin gong.)

> **Solution:** Ho set inn 30 beløp som får renter frå 1 til 30 gongar. Det gjev summen
>
> $$S_{30} = 30\,000 \cdot 1{,}04^{30} + 30\,000 \cdot 1{,}04^{29} + \cdots + 30\,000 \cdot 1{,}04^{2} + 30\,000 \cdot 1{,}04^{1}$$
>
> for saldoen eitt år etter at det tredevte beløpet er sett inn. Dette er ei geometrisk rekkje som me kan skriva om som
>
> $$S_{30} = \sum_{i=1}^{30} 30\,000 \cdot 1{,}04^i = 30\,000 \cdot 1{,}04 \cdot \sum_{i=0}^{29} 1{,}04^i$$

Dette kan me skriva om som

$$S_{30} = 30\,000 \cdot 1{,}04 \cdot \frac{1{,}04^{30} - 1}{1{,}04 - 1},$$

og me kan rekna ut på kalkulator

$$S_{30} = 1\,749\,850{,}06.$$

Saldoen vert altso 1 749 850,06 kroner.

Merknad 6. *Der er ingen bonus for syntaks her. Ein må gjerne skriva rekkja utan summeteikn heile vegen, so lenge argumentet er tydleg.*
Det er ein vesentleg del å få innskots- og renteperiodane rett, slik at (m.a.) det siste innskotet òg for renter éin gong. Der er mange måtar å føra argumentet på, men dersom ein misser ein omgang med renter eller får eit sparebeløp for mykje eller for lite, so er det ein vesentleg mangel i svaret.

(e) Johanna er 67 år og går av med pensjon. Ho har 2 millionar kroner i pensjonsformue. Ho vil bruka ein del av pensjonsformuen på ein annuitet med årleg utbetaling på 200 000 kroner frå og med det året ho fyller 67. Rentenivået er 4%. Kor lenge varer pensjonen? (I kor mange år kan ho få den same annuiteten?)

Solution: Ho skal ha x utbetalingar, den fyrste om med ein gong. Me må finna noverdien på denne utbetalinga, slik at me kan samanlikna med den disponible formuen på to millionar. Me diskonterer med ein faktor på $1/1{,}04$ per år. Noverdien er altso summen

$$S_x = 200\,000 \cdot \big(\frac{1}{1{,}04}\big)^0 + 200\,000 \cdot \big(\frac{1}{1{,}04}\big)^1 + \cdots + 200\,000 \cdot \big(\frac{1}{1{,}04}\big)^{x-2} + 200\,000 \cdot \big(\frac{1}{1{,}04}\big)^{x-1}.$$

Legg merke til at der er x utbetalingar i summen. Den fyrste er ikkje diskontert sidan ho kjem med ein gong.
Me trekk felles faktorar utanfor ein parentes:

$$S_x = 200\,000 \cdot \Bigg(1 + \big(\frac{1}{1{,}04}\big)^1 + \cdots + \big(\frac{1}{1{,}04}\big)^{x-2} + \big(\frac{1}{1{,}04}\big)^{x-1}\Bigg).$$

Dette er ei geometrisk rekkje som me kan skriva om vha. formelen

$$S_x = 200\,000 \cdot \frac{\big(\frac{1}{1{,}04}\big)^x - 1}{\big(\frac{1}{1{,}04}\big) - 1}.$$

Sidan me kjenner noverdien på 2 millionar, kan me setja inn, og få ei likning:

$$2\,000\,000 = 200\,000 \cdot \frac{\big(\frac{1}{1{,}04}\big)^x - 1}{\big(\frac{1}{1{,}04}\big) - 1}.$$

Me flytter over faktorar og får

$$10 \cdot \big(\frac{1}{1{,}04} - 1\big) = \big(\frac{1}{1{,}04}\big)^x - 1.$$

Me reknar ut venstresida og flytter over det lause leddet (-1):

$$1 - 0{,}3846 = 0{,}6154 = \big(\frac{1}{1{,}04}\big)^x.$$

Dette er ei eksponentiell likning, og me tek logaritmen på båe sider:

$$\ln 0{,}6154 = x \cdot \ln \frac{1}{1{,}04},$$

og
$$x = \frac{\ln 0{,}6154}{\ln \frac{1}{1{,}04}} = 12{,}37.$$
Pensjonen varer altso i tolv år.

Oppgåve 3 . . . . *(30%)*

Vestskvip AS sel skvip. Utgiftene deira er 100 kr. per liter produsert skvip, pluss 10 000 kr. dagen i faste utgifter (uavhengig av produksjonsvolumet).

(a). Skriv eit uttrykk for kostnadsfunksjonen $K(x)$.

Solution: Produksjon av x einingar à 100 kr. gjev variable kostnadar på $100x$. Når me legg til faste kostnader får me

$$K(x) = 100x + 10\,000$$

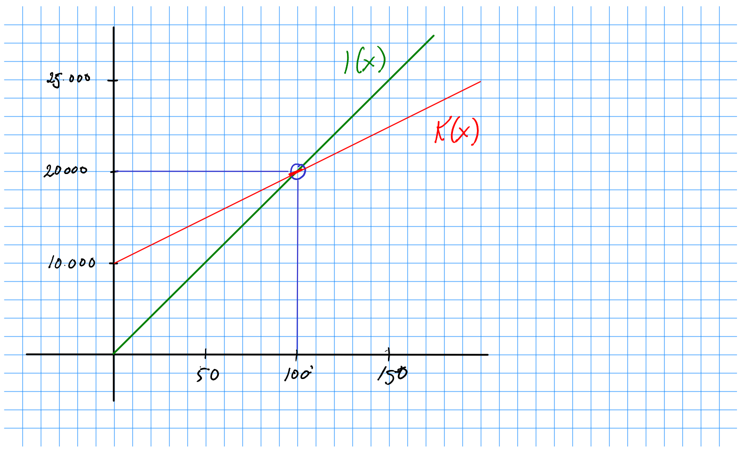
(b). Selskapet sel skvipet for 200kr. literen. Skriv eit uttrykk for inntektsfunksjonen $I(x)$.

Solution: Eit sal på x einingar à 200 kr. gjev inntektsfunksjonen

$$I(x) = 200x$$

(c). Skissér båe funksjonane $I(x)$ og $K(x)$ i same koordinatsystem. Hugs å merka kva kurve som svarer til kva funksjon i teikninga.

Solution:



(d). Skriv eit uttrykk for profittfunksjonen $P(x)$.

Solution: Profitten er inntekt fråtrekt kostnad, altso

$$P(x) = I(x) - K(x) = 100x - 10\,000$$

(e). Finn produksjonsvolumet x som gjev balanse i drifta (korkje overskot ellet underskot). Vis utrekninga og markér løysinga i skissa frå forrige deloppgåve.

Solution: Balanse i drifta er det same som null profitt, altso

$$0 = P(x) = 100x - 10\,000$$

Me kan løysa likninga, som fylgjer

$$100x = 10\,000$$

Når me deler på 100 får me

$$x = 100$$

Bedrifta går i balanse når dei produserer 100 einingar.

Ei anna bedrift har kostnadsfunksjonen

$$K(x) = x^2 - 20x + 1000.$$

(f). Finn eit uttrykk for grensekostnaden $K'(x)$.

Solution: Grensekostnaden er det same som den deriverte av kostnadsfunksjonen:

$$K'(x) = 2x - 20$$

(g). Finn eit uttrykk for gjennomsnittskostnaden (einingskostnaden) $A(x)$.

Solution:

$$A(x) = \frac{K(x)}{x} = x - 20 + \frac{1000}{x}$$

(h). Finn kostnadsoptimum, dvs. det produksjonsvolumet x som gjev lågast mogleg gjennomsnittskostnad $A(x)$.

Solution: Me deriverer, og set den deriverte lik 0,

$$A'(x) = 1 - \frac{1000}{x^2} = 0.$$

Dette gjev likninga

$$1 = \frac{1000}{x^2},$$

eller

$$x^2 = 1000.$$

Kostnadsoptimumet er dermed $x = 10\sqrt{10}$. Det er lett å sjekka at for mindre verdiar av x vert $A'(x) < 0$, og for større vert $A'(x) < 0$. Dermed er $A(x)$ fallande til venstre og stigande til høgre, og optimumet er eit minimum, slik som me ynskjer.

Merknad 7. *Ein kan alternative finna optimum ved likninga $A(x) = K'(x)$. Mange hugsar denne regelen, og det er greitt. Dei som hugsar den generelle regelen som er brukt her, har færre reglar å hugsa.*

Sjå no på tilfellet der bedrifta leverer $x = 100$ einingar.

Solution: Me set inn i funksjonen:

$$A(100) = 100 - 20 + \frac{1000}{100} = 90$$

Gjennomsnittskostnaden er altso 90 kroner per eining.

(i). Kva må prisen vera for at bedrifta skal gå med overskot?

Solution: Prisen må dekkja gjennomsnittskostnaden

$$A(100) = 100 - 20 + \frac{1000}{100} = 90$$

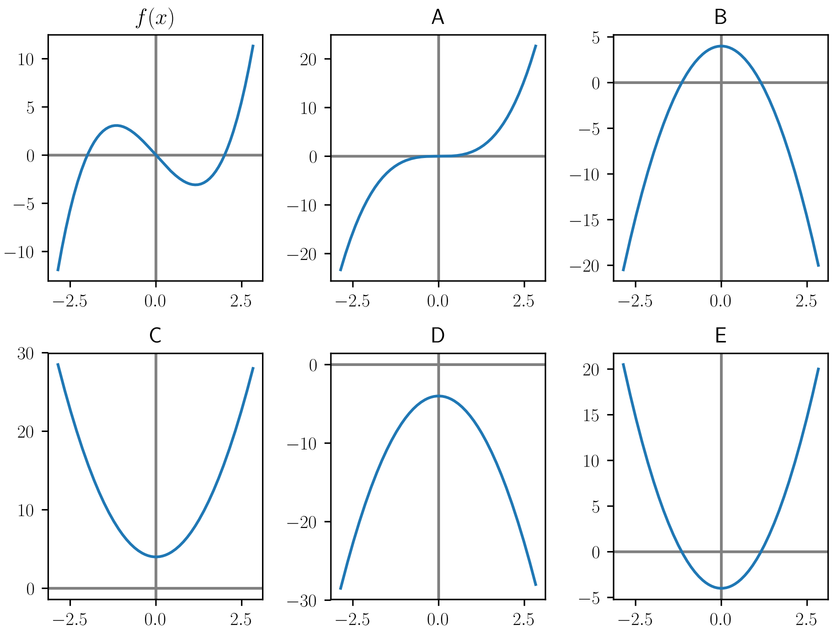
Prisen må altså vera meir enn 90 kr.

(j). Kva må prisen vera for at det skal løna seg å auka produksjonen?

Solution: Prisen må dekkja grensekostnaden

$$K'(100) = 2 \cdot 100 - 20 = 180.$$

Prisen må altså vera meir enn 180 kr.



Figur 1: Funksjonen $f(x)$ og kandidatar for $f'(x)$ til oppgåve 4.

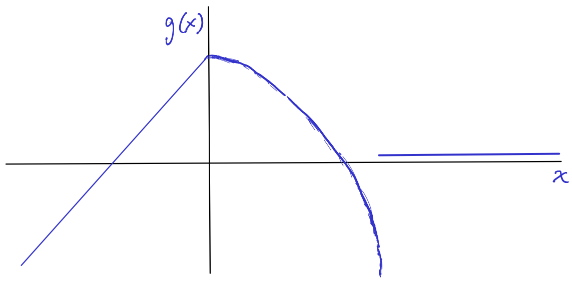
Oppgåve 4 . . . . *(8%)*

(a) Sjå på skissa av $f(x)$ i figur 1. Kva for ein av kandidatane A, B, . . . , F viser den deriverte $f'(x)$? Forklar kvifor.

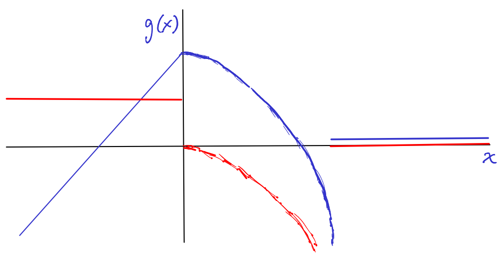
Solution: Me ser korleis $f(x)$ stig, synk og stig igjen. Då må $f'(x)$ vera fyrst positiv, so negativ og til slutt positiv igjen. Den einaste kandidaten som tilfredsstiller dette er F.

Merknad 8. *Forklaringa er essentiell. For å få full pott, skal der vera eit argument som effektivt utelukkar alle dei fire andre kandidatane.*

(b) Skisser $g'(x)$ basert på fylgjande skisse av $g(x)$.



Solution:



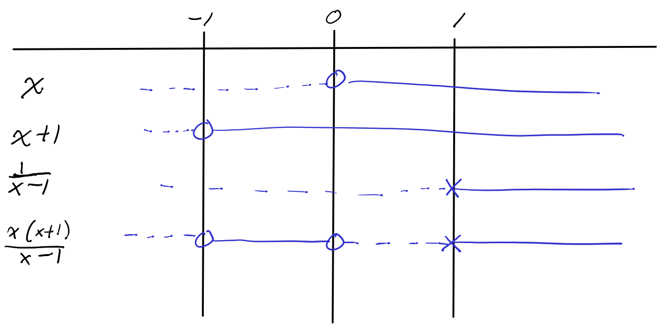
Me ser lineær stigning i starten, der den deriverte må vera konstant positiv. Deretter fell $f(x)$ slik at $f'(x)$ må vera negativ, fyrst nesten flatt, men raskare og raskare, slik at $f'(x)$ startar på 0 og vert mindre og mindre. Til slutt er $f(x)$ konstant, som svarer til $f'(x) = 0$. Desse kommenterte detaljane må vera synlege i skissa for å få full uttelling.

Oppgåve 5 . . . . *(12%)*

(a) Løys ulikheita

$$\frac{x(x+1)}{x-1} \leq 0.$$

Solution: Det greiaste er å teikna forteiknsdiagram



Me konkluderer med at anten har me $x \leq -1$ eller $0 \leq x < 1$.

(b) Løys likninga

$$\frac{x(x+1)}{x-1} = 2.$$

Solution: Me legg merke til at likninga ikkje er definert for $x = 1$ (divisjon med null); dvs. at $x = 1$ ikkje er ei løysing uansett kva vidare resonnement tilseier.
Me flyttar over divisoren for å unngå brøken,

$$x(x+1) = 2(x-1).$$

Gangar me ut får me

$$x^2 + x = 2x - 2.$$

Når me flyttar over alle ledda til ei side, får me ei andregradslikning på standardform:

$$x^2 - x + 2 = 0.$$

Denne kan me løysa med formel:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2}.$$

Her tek me kvadratroten av eit negativt tal, og inga løysing finst.

(c) Finn $f'(x)$ når $f(x) = \ln(x^2 - 1)$.

Solution: Her bruker me kjerneregelen med $u(x) = x^2 - 1$ som kjerne. Me har $u'(x) = 2x$. Når me deriverer den ytre funksjonen $\ln u$ får me $1/u$. Det gjev

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

(d) Finn $f'(x)$ når $f(x) = e^x \cdot (x^{17} - x^2)$.

Solution: Her bruker me produktregelen med

$$g(x) = e^x, \tag{4}$$
$$h(x) = x^{17} - x^2. \tag{5}$$

Dei deriverte er

$$g'(x) = e^x, \tag{6}$$
$$h'(x) = 17x^{16} - 2x. \tag{7}$$

Då får me

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = e^x(x^{17} + 17x^{16} - x^2 - 2x).$$