AR101015 Matematisk Problemløysing

Hans Georg Schaathun

Ordinær eksamen 19. desember 2019
Revidert 12. desember 2019

(a). Les nøye gjennom heile oppgåvesettet før du tek til å løysa oppgåvene.

(b). Enkel kalkulator er einaste tillatne hjelpemiddel.

(c). Svar på oppgåvene med tanke på å forklara medstudentane korleis du tenkjer og overtyda dei om at løysinga er rett.

(d). Det er ikkje eit mål å velja same løysingsmetode som eksaminator. Der er som regel mange vegar til målet.

Merknad 1. *Oppgåvesettet går ut frå at karakterane vert sett ut frå prosentdel riktige svar, med fylgjande grensar:* $E \geq 40\%$, $D \geq 50\%$, $C \geq 60\%$, $B \geq 80\%$, $A \geq 90\%$.

Merknad 2. *Oppgåve 1–3 (75% av settet) er typiske oppgåver som har vore vanleg på eksamen tidlegare og som har vore tungt vektlagt i undervisinga. Det er tydeleg kommunisert til studentane at me ventar at alle kan løysa desse oppgåvene, og at gode løysingar på dei tilstrekkeleg til ein C.*

Merknad 3. *Oppgåve 4–6 er oppgåvetypar som er sjeldnare på eksamen og meint for dei studentane som tykkjer at C er ein dårleg karakter.*

Merknad 4 (Læringsmål)**.** *Kunnskap: Kandidaten skal*

(a). kunna sjå samanhengen mellom abstrakte matematiske modellar og konkrete problem i bedriftsøkonomi og marknadsanalyse.

(b). ha ein heilskapleg forståing av problema som er nemnde under ferdigheitsmåla, og kjenna til ulike løysingsstrategiar der det er relevant.

(c). kunna vita kva gjennomsnitts- og grensekostnad fortel om lønsemd.

Ferdigheter: Kandidaten skal

(a). kunna rekna på rente- og finansproblem ved hjelp av eksponential- og logaritmefunksjonar og geometriske rekkjer.

(b). kunna rekna på lineære og kvadratiske kostnads- og inntektsfunksjonar, løysa balanseproblem ved hjelp av likningar.

(c). kunna analysere og drøfta polynomfunksjoner, inkl. dervasjon og identifisering av null- og ekstremalpunkt.

(d). kunna bruka algebraiske formuleringar for å koma fram til generelle slutningar.

Kandidaten bør

(a). kunna drøfta og analysera rasjonale funksjonar og eksponential- og logaritmefunkasjonar.

(b). kunne løysa abstrakte og algebraiske problem innanfor problemområda nemnde over.

(c). kunne overføra løysingsteknikkane nemnde over til andre typar problem.

Kompetanse: Kandidaten skal

(a). kunna kommunisera om og ved hjelp av matematikk.

(b). kunna matematisera, dvs. finna løysbare matematiske formuleringar for problem frå røynda.

Merknad 5. *Som det framgår av læringsmåla er rekneferdigheitene ein liten del av emnet. I sensuren skal ein leggja stor vekt på*

(a). at studentane forstår det praktiske problemet i tekstoppgåvene og ser samanhengen mellom matematikken og røynda.

(b). at studentane presenterer løysingane på ein måte som er egna til å opplysa og overtyda likemenn, t.d. medstudentar som som ikkje kan meir matematikk enn dei sjølve.

(c). at studentane har ein heilskapleg forståing av løysingane sine. Dette gjeld særleg ved spørsmål om skisser, som må vera konsistente med utrekningane. Studentar som reknar rett men ikkje kan teikna ei konsistent skisse har ikkje *nådd læringsmåla, og vil ikkje ha nytte av rekneferdigheitene vidare.*

Dette har vore sterkt vektlagt i undervisinga.

Oppgåve 1 .... *(25%)*

Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x.$$

Svar på fylgjande spørsmål, og markér svaret både i skissa og i teksta.

(a) Kva nullpunkt har funksjonen?

(b) Kva ekstremalpunkt (maksimum og minimum) har funksjonen? Bestem x- og y-verdiane til ekstremalpunkta.

(c) For kva x-verdiar er funksjonen stigande?

(d) Finn vendepunktet til $f(x)$. Vis både x- og y-verdien.

(e) Finn likninga for vendetangenten og teikn vendetangenten i skissa.

(f) Kva skjer med funksjonsverdien $f(x)$ når $x \to \infty$?

Merknad 6. *Det viktigaste i denne oppgåva er at studentane kan skapa seg ein god mental modell av funksjonen, og kan uttrykja denne i skissa. Difor skal ein ikkje gje meir enn maksimalt 50% uttelling for eit svar utan skisse eller med ei skisse som ikkje er konsistent med utrekningane.*

Dei skal vidare kunna bruka ein eller fleire rekneteknikkar for å byggja opp modellen, og fastsetja karakteristiske punkt eksakt. Det er venta at studentane vel ulike strategiar og slik skal det vera.

Skissa gjev hjelp til å avdekkja mange potentielle reknefeil, og ein skal difor trekkja strengt for reknefeil som studenten burde oppdaga vha. skissa. Det tel òg positivt om studenten er merksam på og kommenterer evt. reknefeil, sjølv om det er betre å rekna rett.

Oppgave 1

L1

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x$$

a) Nullpunkt

$$2x^3 - 6x^2 + 4x = 0$$
$$2x(x^2 - 3x + 2) = 0$$
$$x \in \{0, 1, 2\}$$

b) Extremalpunkt

$$f'(x) = 6x^2 - 12x + 4$$

$f'(x) = 0$ for $x \in \left\{ \underbrace{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}_{x_1}, \underbrace{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}_{x_2} \right\}$ (Avrundet $\{0.42, 1{,}58\}$)

3.gradsfunksjon med pos 3.gradskoeff og to ekstremalpunkt har graf av typ

$\therefore$ f har toppunkt $(x_1, f(x_1)) = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{9}\right) \approx (0{,}42, 0{,}77)$

og bunnpunkt $(x_2, f(x_2)) = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{9}\right) \approx (1{,}58, -0{,}77)$

c) f-grafen (eller funksjonen f) er stigende for $x < x_1$ og for $x > x_2$

eventuelt for $x \leq x_1$ og for $x \geq x_2$ (alt etter lærebok/pensum)

d) Vendepunkt for 3.gradsfunksjon med to ekstremalpkt har middelverdi av ekstremalpunkts koordinater, er derfor $(1, 0)$

e) $f'(1) = \left[6x^2 - 12x + 4\right]_{x=1} = 6 - 12 + 4 = -2$

Vendetangents likning

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$$ — x_1 og x_2 ikke samme i deloppg. b
$$y - 0 = -2(x - 1)$$
$$y - 0 = -2x + 1$$
$$y = -2x + 1$$

f) Når $x \to \infty$ vil tredjegradsleddet i $f(x)$ dominere, og $f(x) \to \infty$

Oppgåve 2 .... *(27%)*

Ålesund Dings og Profitt AS sel dingsar. Utgiftene deira er 64 kr. per produsert dings, pluss 4096 kr. dagen i faste utgifter (uavhengig av produksjonsvolumet).

(a). Skriv eit uttrykk for kostnadsfunksjonen $K(x)$.

(b). Kvar dings vert solgt for 100kr. Skriv eit uttrykk for inntektsfunksjonen $I(x)$.

(c). Skissér båe funksjonane $I(x)$ og $K(x)$ i same koordinatsystem. Hugs å merka kva kurve som svarer til kva funksjon i teikninga.

(d). Finn produksjonsvolumet x som gjev balanse i drifta (korkje overskot ellet underskot). Vis utrekninga og markér løysinga i skissa frå forrige deloppgåve.

(e). Skriv eit uttrykk for profittfunksjonen $P(x)$.

(f). Skriv eit uttrykk for einingskostnaden.

(g). Kva skjer med gjennomsnittskostnaden når når produksjonen aukar uavgrensa (dvs. $x \to \infty$)?

Ei anna bedrift har kostnadsfunksjonen

$$K(x) = 0{,}1 \cdot x^2 + x + 1000.$$

(h). Finn eit uttrykk for grensekostnaden $K'(x)$.

(i). Forklar kort kva grensekostnaden fortel oss med tanke kva som er fornuftig for bedrifta å gjera med produksjonsvolumet.

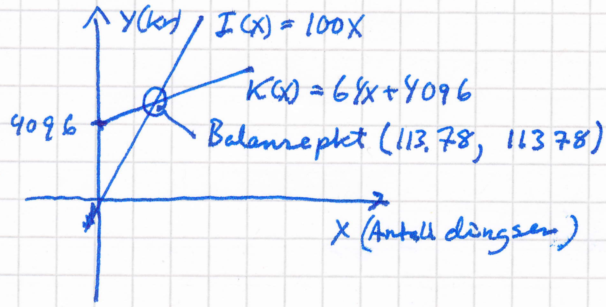
Merknad 7. *Der oppgåva spør om skisse, gjeld det same som i oppgåva 1. Det er vesentleg at studentane kan visa ein god og konsistent mental modell.*

Oppgave 2 12

a) $K(x) = \underline{64x + 4096}$ (kr)

b) $I(x) = \underline{100x}$

c)



d) Balanse når

$$I(x) - K(x) = 0$$

$$100x - (64x + 4096) = 0$$

$36x = 4096$, $x = 113,28$ Balanse når produksjonen er $\underline{\underline{113,28}}$ dingser (bør nok avrundes)

e) $P(x) = I(x) - K(x) = \underline{36x - 4096}$

f) Enhetskostnaden er

$$A(x) = \frac{K(x)}{x} = \underline{64 + \frac{4096}{x}}$$

g) $x \to \infty \Rightarrow A(x) = 64 + \frac{4096}{x} \to 64$ (kr)

h) $K'(x) = (0,1x^2 + x + 1000)' = \underline{0,2x + 1}$

i) Vi antar salgspris p per enhet og løser ulikheten

$$K'(x) < p$$
$$0,2x + 1 < p$$
$$\underline{x < 5p - 5}$$

Hvis $5p$ er et heltall, betyr dette at produksjonen kan økes med en enhet med økt profitt som resultat så lenge antall allerede produsert er $x \le 5p - 5 - 1 = \underline{5p - 6}$. Momentan K-vekstfart vil da være mindre enn p i intervallet $[5p-6, 5p-5\rangle$ ~~efom~~ fordi K-grafen i dette intervallet er voksende med hulside opp.

Hvis $5p$ ikke er et heltall, risikerer vi at $a < 5p - 5$ er oppfylt for et heltall a samtidig som momentan vekstfart for K vil være større enn p i en stor del av intervallet $x \in [a, a+1\rangle$. Vi må i så fall kreve $x < 5p - 5 - 1 = 5p - 6$, altså $\underline{\underline{5p \le 5p - 7}}$

Kreves/forventes ikke! Hvis vi produserte x liter olje, slapp vi dette. Det skyldes at x er en diskret variabel.

Oppgåve 3 .... *(27%)*

Denne oppgåva dreier seg om renterekning og finansmatematikk.

(a) Du set 12 000 kr. på konto til 1,5% rente. Kva er saldoen etter ti år?

> **Solution:** Saldoen etter ti år er $12\,000 \cdot 1{,}015^{10} = 0{,}00$ kroner.

(b) Du set 100 kr. på konto til 2% rente. Kor mange år tek det før saldoen er tredobla (300 kr.)?

> **Solution:** Lat t vera tida det tek å dobla saldoen. Etter t år er saldoen altso 4000 kroner, eller $100 \cdot 1{,}02^t$ kroner. Dette gjev likninga
>
> $$300 = 100 \cdot 1{,}02^t.$$
>
> Me forenklar ved å dela på 100, og får
>
> $$3 = 1{,}02^t.$$
>
> Ved å ta logaritmen på båe sider får me
>
> $$\ln 3 = \ln 1{,}02^t,$$
>
> eller
>
> $$\ln 3 = t \ln 1{,}02,$$
>
> og
>
> $$t = \frac{\ln 3}{\ln 1{,}02} \approx 55{,}48.$$
>
> Sidan me berre får renter på slutten av året, går det 56 år før saldoen faktisk bikkar 300 kroner.

Merknad 8. *Løysingsforslag er omstendeleg. For mange vil det vera rett å skriva knappare og det er ok.*

(c) Du sparer 5000 kr. i året på ein sparekonto med 2% rente. Kor mykje har du på sparekontoen når du har sett inn det tiande beløpet?

> **Solution:** Me set inn tolv tusenlappar som får renter frå 0 til 11 gongar. Det gjev summen
>
> $$S_{12} = 1000 \cdot 1{,}03^{11} + 1000 \cdot 1{,}03^{10} + \cdots + 1000 \cdot 1{,}03^{1} + 1000 \cdot 1{,}03^{0}$$
>
> for saldoen etter det tolvte beløpet er sett inn. Dette er ei geometrisk rekkje som me kan skriva om vha. formelen
>
> $$S_{12} = 1000 \cdot \frac{1{,}03^{12} - 1}{1{,}03 - 1},$$
>
> og me kan rekna ut på kalkulator
>
> $$S_{12} = 14\,192{,}03.$$
>
> Saldoen vert altso 14 192,03 kroner.

Merknad 9. *Ein kan gjerne skriva rekkja med summeteikn. Det er ikkje gjort her for å understrekja at det ikkje er avansert notasjon som er poenget, men å kjenna att formen på summen.*

(d) Du sparer 5000 kr. i året på ein sparekonto med 2% rente. Kor mange år tek det før du har 50 000 kr. på kontoen?

(e) Kva er no-verdien av 100 000 kroner utbetalt om ti år når rentenivået er 4%?

(f) Annanias er 67 år og går av med pensjon. Han vil bruka ein del av pensjonsformuen på ein annuitet. Han vil ha ei årleg utbetaling på 100 000 kroner frå og med det året han fyller 67 til og med det året han fyller 76. Finn noverdien av denne annuiteten når rentenivået er 3%.

(g) Emilie vurderer å kjøpa opp *startup*-bedrifta Nova. Ho reknar med at bedrifta kan tena 20 millionar kroner i året til evig tid. Kor mykje kan Fredrik maksimalt vera viljug til å betala for StarIdea? Han reknar med eit rentenivå på 3%.

Solution: Fredrik ser for seg ein inntekt på 20 mNOK kvart år. Noverdien (i mNOK) av inntekta i år i er då

$$10 \cdot \left(\frac{1}{1{,}03}\right)^i.$$

Det er ikkje spesifisert i oppgåva om me skal rekna med inntekt umiddelbart (år 0). Me går (vilkårleg) ut frå at me skal det. Då er noverdien av bedrifta

$$S = 20 \cdot \left(\frac{1}{1{,}03}\right)^0 + 20 \cdot \left(\frac{1}{1{,}03}\right)^1 + 20 \cdot \left(\frac{1}{1{,}03}\right)^2 + 20 \cdot \left(\frac{1}{1{,}03}\right)^3 + \cdots,$$

eller

$$S = 20 \cdot \left(\left(\frac{1}{1{,}03}\right)^0 + \left(\frac{1}{1{,}03}\right)^1 + \left(\frac{1}{1{,}03}\right)^2 + \left(\frac{1}{1{,}03}\right)^3 + \cdots\right).$$

Dette gjev ei geometrisk rekkje som me kan skriva som

$$S = 20 \cdot \frac{\left(\frac{1}{1{,}03}\right)^\infty - 1}{\left(\frac{1}{1{,}03}\right) - 1}.$$

Sidan vekstfaktoren er mindre enn éin, forsvinn leddet som er opphøgd i ∞, og me får

$$S = 20 \cdot \frac{-1}{\left(\frac{1}{1{,}03}\right) - 1}.$$

Me kalkulator finn me at noverdien er $S = 686.67$ mNOK.

Merknad 10. *Sidan standardkalkulatorane handterer parentesuttrykk som det som er gjeve for S relativt pent og oversiktlig, er der ingen grunn for å forenkla vidare på papir. Det er lov, men det er hensiktsstridig å krevja det.*

Oppgave 3

a) Saldo etter 10 år

$12000\,kr \cdot 1{,}015^{10} = \underline{13\,926{,}50\,kr}$

b) Tredobling etter x år

$1{,}02^x = 3$

$x = \ln 3 / \ln 1{,}02 = 55{,}5$

Det tar 56 år

c) Straks tiende beløp (innskudd) er betalt er saldo

$$\sum_0^9 5000 \cdot 1{,}02^n = \frac{5000(1{,}02^{10}-1)}{1{,}02-1} = \underline{\underline{54\,748{,}60\ (kr)}}$$

d) Vi lar n rundet av oppover til nærmeste heltall representere antall år.

$$\sum_{k=0}^{n} 5000 \cdot 1{,}02^k = 50000$$

$$\sum_0^n 1{,}02^k = 10$$

$$\frac{1{,}02^{n+1}-1}{1{,}02-1} = 10$$

$$1{,}02^{n+1} = 0{,}2+1$$

$$n = \frac{\ln 1{,}2}{\ln 1{,}02} - 1 = 8{,}2$$

Avrunding oppover gir: Sparingen tar 9 år

e) Nåverdi er $\frac{100\,000\,kr}{1{,}04^{10}} = \underline{67\,556{,}42\ (kr)}$

f) $100\,000\left(1 + \frac{1}{1{,}03} + \cdots + \left(\frac{1}{1{,}03}\right)^9\right)$

$$= 100\,000 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1{,}03}\right)^{10}}{1-\frac{1}{1{,}03}} = \underline{\underline{87\,861{,}90\ (kr)}}$$

~~g) Antar for enkelthets skyld første utbetaling etter ett år.~~
~~Skal han betale nåverdi "blir han å betale"~~

$$\cancel{\sum_{n=1}^{\infty} 10 \cdot \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^n = \frac{10}{1{,}05} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1{,}05}} = \frac{10}{1{,}05} \cdot \frac{1{,}05}{1{,}05-1} = \frac{10}{0{,}05} = 200\ (\text{mill kr})}$$

Oppgåve 4 .... *(10%)*

Gjennomsnittskostnaden for ei viss bedrift er gjeven som funksjonen

$$A(x) = 0{,}02 \cdot x + 10 + \frac{1000}{x}.$$

Drøft og skisser funksjonen $A(x)$. Svar på fylgjande spørsmål, og illustrer svara med markering i skissa.

(a). Kor mykje må bedrifta produsera for å oppnå lågast mogleg kostnad per eining?

(b). Kor mykje kostar kvar eining (i gjennomsnitt) når det er so billeg som mogleg?

(c). Markér asymptotane i skissa.

(d). Finn matematiske uttrykk (likningar eller funksjonsuttrykk) for asymptotane.

Solution: Det er enklast å skissare asymptotane fyrst. Me ser at når $x = 0$ er $A(x)$ udefinert, og når $x \to 0$ vert det siste leddet uendeleg stort og $A(x) \to \infty$.

Den horisontale asymptoten er altso $x = 0$ (y-aksen).

Når $x \to \infty$ vert det siste leddet uendeleg lite, og $A(x) \to 0{,}05x + 2$.

Kurva har altso skråasymptote $y = 0{,}05x + 2$. Denne teiknar me i skissa.

Når me har asymptotane, kan me teikna ein relativt god grovskisse av funksjonen, som vist. Sidan sisteleddet $100/x$ er positivt for positiv x, ligg kurva over asymptoten. Det einaste som gjenstår er å rekna ut minimumspunktet.

Me deriverer og finn

$$A'(x) = 0{,}05 - \frac{100}{x^2}.$$

Når me set $A'(x) = 0$ og løyser får me

$$0{,}05 = \frac{100}{x^2}, \tag{1}$$

$$x^2 = \frac{100}{0{,}05} = 2000, \tag{2}$$

$$x = \sqrt{2000} \approx 44{,}72. \tag{3}$$

Kostnadsoptimumet finn me når produksjonen er $x = 44{,}7$ einingar.

Einingskostnaden i optimum er

$$A(\sqrt{2000}) \approx 6{,}47.$$

Produksjonen kostar altso 6,47 per eining i optimum.

Merknad 11. *Notasjonen $A(x) \to 0{,}05x + 2$ er ikkje kosher, men han er brukt her fordi han er meiningsfull, og det bør vera nok i denne typen kurs.*

Puritanske matematikarar vil skriva $A(x) - 0{,}05x + 2 \to 0$. Det er òg lov.

Merknad 12. *Ein kan bruka regelen om at grensekostnad er lik gjennomsnittskostnad i optimum. Her er den generelle metoden brukt, for å understreka at ein ikkje treng å hugsa spesielle reglar for å løysa oppgåva.*

Merknad 13. *Det er mogleg å teikna ei god skisse utan å teikna asymptotane. Eit typisk 50%-svar gjev ei grovskisse utan synlege feil og korrekt utrekning på a-b, men nemner ikkje asymptotane.*

Dersom skissa tydeleg viser den asymptotiske utviklinga, sjølv om asymptotane ikkje er komenterte, bør svaret gje meir enn halv uttelling (60–70%).

Ei god og rett skisse skal gje ei viss uttelling (kanskje ≈ 20%) sjølv om alle delspørsmåla manglar svar.

Oppgave 4

$A(x) = 0{,}02x + 10 + \frac{1000}{x}$

d) $x \to \infty \Rightarrow (0{,}02x + 10) - A(x) \to 0$

$\underline{y = 0{,}02x + 10 \text{ er skråasymptote for } A(x)}$

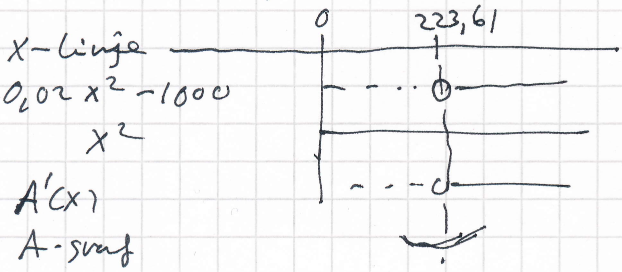
$x \to 0 \Rightarrow A(x) \to \infty$

$\underline{x = 0 \text{ er vertikalasymptote for } A(x)}$

a) $A'(x) = 0{,}02 - \frac{1000}{x^2} = \frac{0{,}02x^2 - 1000}{x^2}$

Hj.regn $0{,}02x^2 - 1000 = 0 \quad x > 0$

$x = \sqrt{\frac{1000}{0{,}02}} = \sqrt{50000} = 223{,}61$



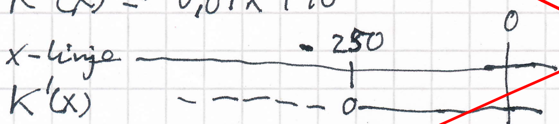
Lavest kostnad per enhet ved produksjon av ca 224 enheter

b) Enhetspris ved minimal enhetskostnad er A(224) som det nok spørres etter.

Men hvis jeg pirker, (kverulerer) er det grensekostnaden det spørres etter. Så jeg beregner

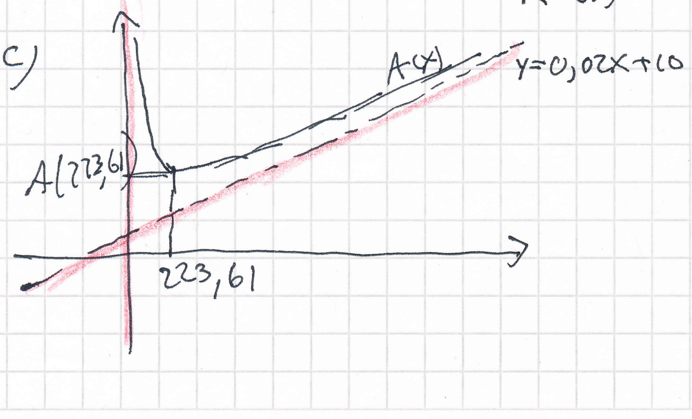
$K(x) = x\,A(x) = 0{,}02x^2 + 10x + 1000$

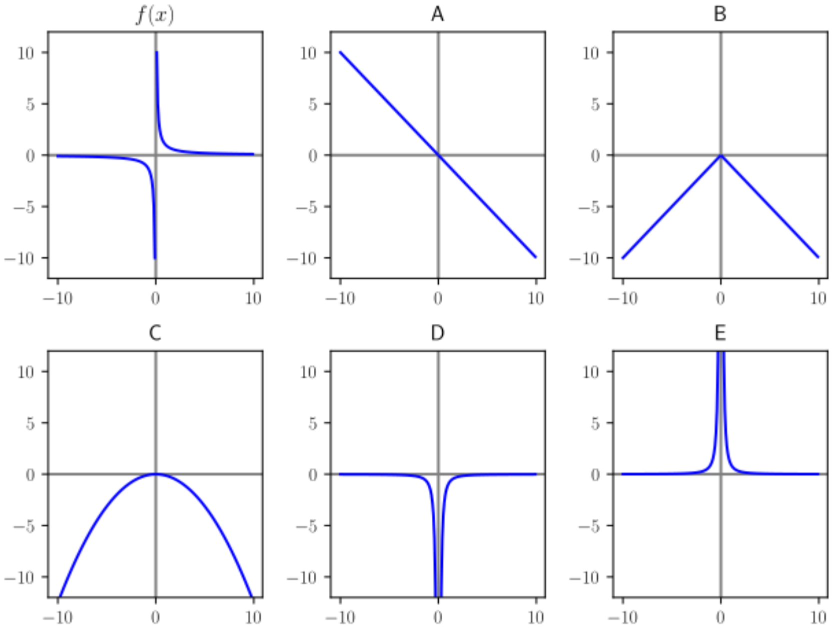
$K'(x) = 0{,}04x + 10$



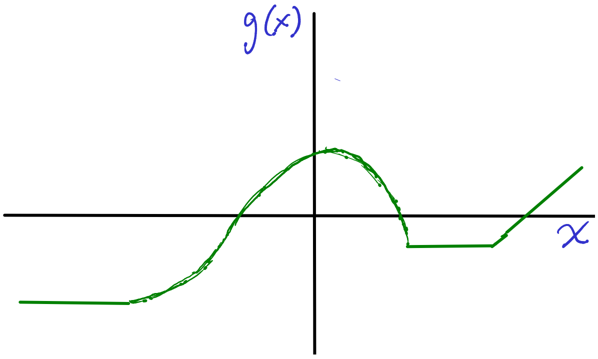
Siden antall produserte enheter må være positivt for å finne ~~pris~~ kostnad for en produsert enhet blir det billigst å produsere en enhet, den første enheten. Fast kostnad påløper uansett, påløpt kostnad ved å produsere en enhet er lavest for den første. Kostnaden er da $K'(1) = 0{,}04 \cdot 1 + 10 = \underline{\underline{10{,}04}}$

c)





Figur 1: Funksjonen $f(x)$ og kandidatar for $f'(x)$ til oppgåve 5.



Figur 2: Funksjonen $g(x)$ i oppgåve 5.

Oppgåve 5 . . . . *(8%)*

(a) Sjå på skissa av $f(x)$ i figur 1. Kva for ein av kandidatane A, B, . . . , F viser den deriverte $f'(x)$? Forklar kvifor.

Merknad 14. *Forklaringa er essentiell. For å få full pott, skal der vera eit argument som effektivt utelukkar alle dei fire andre kandidatane.*

(b) Skisser $g'(x)$ basert på skissa i figur 2.

Oppgåve 6 . . . . *(3%)*

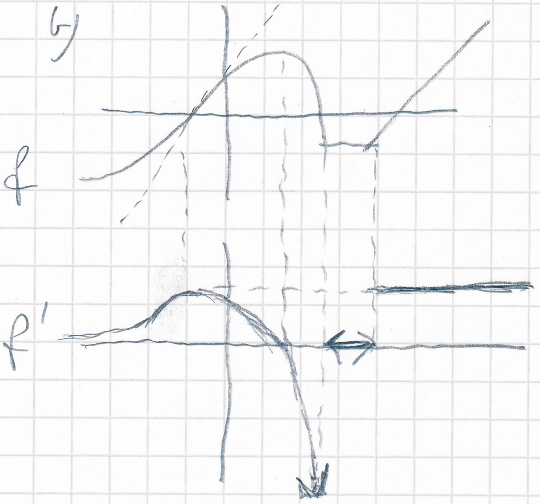
Løys ulikheita

$$\frac{x(x-2)}{x+2} \geq 2.$$

Oppgave 5

a) ~~Kandidat~~ D er den eneste som tilfredsstiller kravet f' stiller: Grafen skal være sterkt avtagende for x nær 0 (x på eller neg) og svakt avtagende for $|x| \gg 0$ (En kunne drai inn asymptotene til f-graf og f'-graf.)

b)



Jeg lot vendetangent være parallell med rett stråle til høyre i g-graf. Litt interessant for g'-graf, men oppgaven var ikke slik.

Oppgave 6

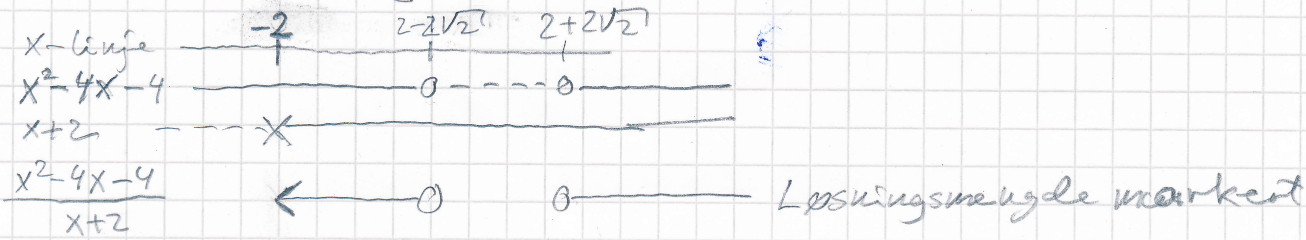
$$\frac{x(x-2)}{x+2} \geq 2$$

$$\frac{x^2-2x-2x-2}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{x^2-4x-4}{x+2} \geq 0$$

Hjelperegning: $x^2-4x-4=0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+16}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{2}$$



Løsning $x \in \langle -2, 2-2\sqrt{2}] \cup [2+2\sqrt{2}, \rightarrow \rangle$